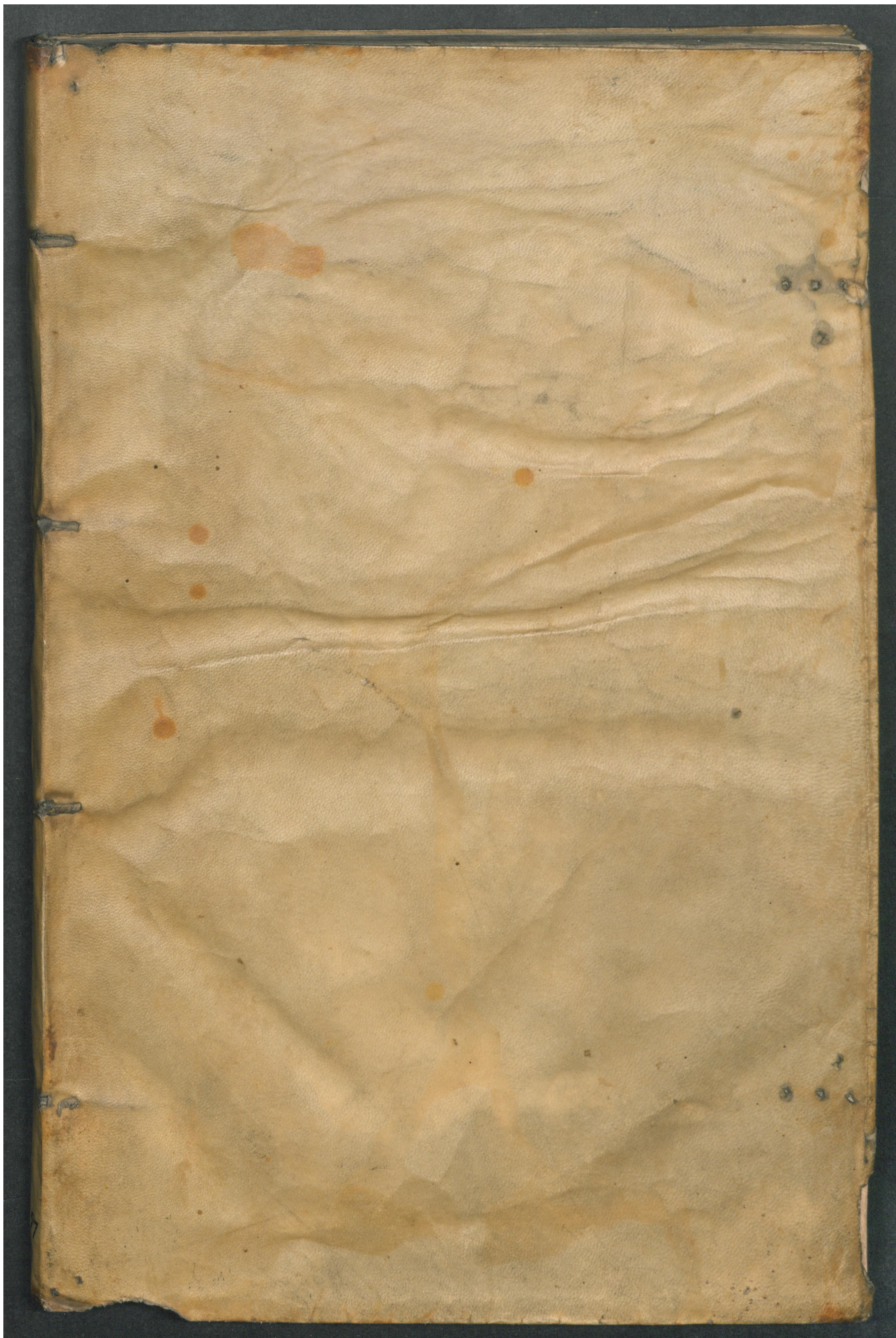


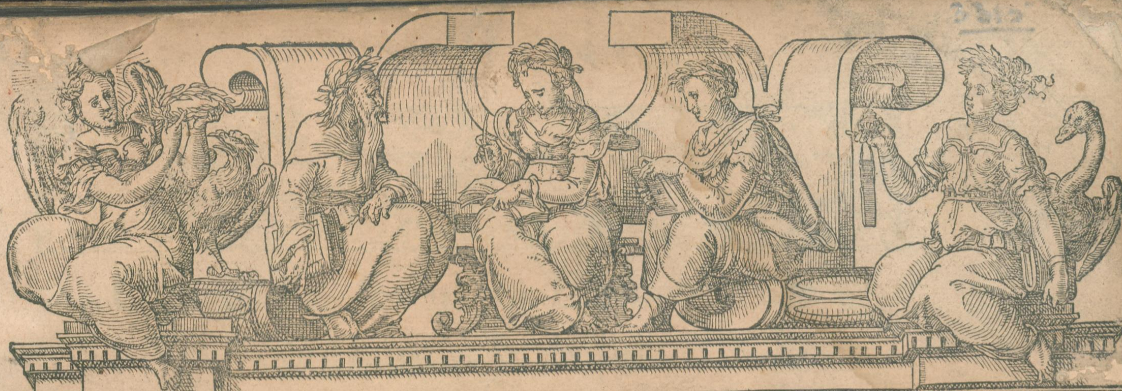

1557
— Peletarii —







EUCLID



IACOBI PELETARII CENOMANI,



In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex.

Ad Carolum Lotharingum, Principem, Cardinalemq; amplissimum.



LVGDVNI,
APVD IOAN. TORNÆSIVM
ET GVL. GAZEIVM.
M. D. LVII.

Cum Priuilegio Regis.



Priuilegij summa.

LITERIS *Regijs cautum est Joanni Tornæsio, Nequis iniussu in tota Galliarum ditione has Iacobi Peletarij Cenomani Demonstrationes hinc ad sextum vsque annum imprimat, néue vspiam impressas vendat. Qui secùs fecerit, pœnis ex sanctione multabitur. Datum Fonsbellaquei,* IIII *Non. Maias* M. D. LV.



Quæ ad hos ſex libros Elementorum contulimus præcipua.



NOVAS Demonſtrationes paſſim ad Euclidem adiecimus: quas ex firmiſſimis probationum fundamentis, Recto & Æquali, maximè ex Circulo, totius operis Geometrici archetypo, deprompſimus.

Demonſtrationes nonnullas Theonis & Campani, quum non ſatis probabiliter, aut non ſatis appoſitè confirmarent, emendauimus: cæteras concinniores clarioresq́; reddidimus.

Improprias Demonſtrationes à Geometria excluſimus: illas ſcilicet, quæ Figurarum, quas vocant, ſuperpoſitionibus nitebantur.

Demonſtrauimus ad decimamſextam Tertii, quam nos decimãquintam fecimus, neque lineæ rectæ cum Circulo, neque Circulorum inter ſe contactũ, quantitatem eſſe: Idq́; præter Euclidis ſententiam. Et paralogiſmos inde ortos à Geometria depulimus.

Ibidem explicauimus quánam ratione duæ lineæ in eodem plano non paralleli, concurrere non poſſint: tum ex quo genere eſſet altera illarum oſtendimus. Dubitatio ſcilicet iam tot ſeculis inter Geometras indiſſoluta.

Nouas Propoſitiones à nobis demonſtratas ſuis locis appoſuimus: nullas tamen in ordinem redegimus. Seriem enim Elementorum ab Euclide collocatam ſuæ integritati reliquimus: niſi ſiquando Campanum ſecuti ſumus, quum in varietate nonnihil compendii deprehenderemus. numerum tamen Theonis vbique ſubſcripſimus. Illas autem potiſſimùm de noſtris addidimus Propoſitiones, quæ ad effectionem Geometriæ pertinebant: vt ad ſcientiã vſum adiungeremus.

Principia Geometriæ nouis meditationibus illuſtrauimus, Punctum, Lineam, Superficiem, Circulum ipſum. Sed & Anguli naturam, conformationem, conſtitutionemq́; hactenus non animaduerſam explicauimus ad duodecimam Definitionem Primi, tum ad decimamquintam Propoſitionem Tertii.

Quinti Libri Definitiones Geometricè declarauimus, earumq́; ſuſpectam difficultatem ſuſtulimus.

Rerum naturam in Geometria tanquam in ſpeculo elucere, eamq́; è Geometricis ſpeculationibus petẽdam eſſe docuimus: quod paſſim agnoſcent qui commentationibus noſtris operam daturi ſunt.

Euclidis verba non religiosè, ſed ſententiam fideliter ſequuti ſumus: &

 latinè,

latinè, quoad eius fieri potuit, expreßimus.

Ad Demonstrationum autem formulas, vix mediocrem ornatum attulimus verborum. Apertam enim simplicitatem retinere maluimus, quàm nimis obscuram diligentiam affectare. Atque haud scio an hoc argumentum Romanæ linguæ facultatem superet. Geometria quippe se ad Latinos tum recepit, quũ iam apud eos iacêret dicendi studium. Quod quum dico, non iam Impoßibilis vocem significo, duram illam quidem M. Fabio, tamen Vlpiano receptam, Capite Non impoßibile puto, Legis De Pactis: sed alias satis multas, quæ arti sic inhærebant, vt ab arte excuti non poßent. Quinetiam integras periodos, nulla modorum aut numerorum ratione seruata, exhibere coacti sumus: dum crebras notarum verborumq; iterationes fieri necesse fuit: argumento alioqui parum tractabili. Sed cesso de his admonere. Verborũ enim curiositas, ad rerum pondera (quas solas spectat Geometria) parum affert momenti.

Atque hæc sunt quibus nostram demonstrandi Euclidis rationem exponendam esse duximus.

Quæ verò à nobis adiectæ sunt Propositiones, sic habent.

Libro Primo.

AD XV PROPOSITIONEM.

Si quatuor lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppositi æquales fuerint: binæ aduersæ in rectum sibi erunt & linea vna.

AD XXIII.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum constituere.

AD XXIX.

Si duæ rectæ lineæ quæ duas parallelos secant, inter ipsas ad vnum punctum coïerint, duosq; angulos alternos æquales fecerint, aut angulum exteriorem interiori sibi opposito ex eadem parte æqualem, aut denique duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

AD XXXIIII.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri dato angulo æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis esse minores.

AD XXXVIII.

Datum Triangulum in duo æqualia partiri.

A puncto in vno laterum Trianguli signato lineam ducere, quæ Triangulum bifariam diuidat.

AD XXXIX.

Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia secuerit, ipsa erit tertio lateri æquidistans. Ex Campano.

AD XLII.

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

AD XLIII.

Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia, duoq́ quantacunque Complementa diuisum fuerit: duorum Complemētorum dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi dimetiens.

AD XLIIII.

Super data recta linea dato Parallelogrammo æquale Triangulum cōstituere, habens angulum angulo dato æqualem.

AD XLV.

Propositis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minorem cognoscere.

AD XLVI.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, sua latera Quadrati lateribus æquidistantia habuerint, Quadrata esse oportet.

AD XLVII.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Si duo Triangula rectangula æquales subtensas habuerint, Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, erunt æqualia quadratis duorum reliquorum laterum alterius.

Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.

Data Diametro, componere Quadratum cuius est Diameter.

Quadratum Diametri, duplum est Quadrati cuius est Diameter.

AD XLVIII.

Propositis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adiungere.

Et est Campani: quam tamen nos compendiosius demonstrauimus.

Secundo libro nullas Propositiones interiecimus.

Libro Tertio.

AD VII.

Si duæ lineæ rectæ ab aliquo puncto Diametri exeuntes, angulos æquales cum Diametro fecerint: ipsæ sunt æquales.

AD XV, quæ est Theoni XVI.

Contactus duorum Circulorum interior, quantitas non est.

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, quantitas non est.

Contactus duorum Circulorum exterior, quantitas non est.

Anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, siue intra siue extra Circulum: recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

AD XVI.

Lineæ rectæ quæ Circulum secet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelum ducere.

AD XXX.

Si in Circulo Triangulum rectangulum inscriptum fuerit: latus recto angulo oppositum, Diameter erit Circuli.

AD

AD XXXV.

Si ab eodem puncto extra Circulum signato plures lineæ Circulum secent: quæ ex vnaquaque in sui partem extimam fiunt Rectangula, inter se sunt æqualia.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ, Circulum tetigerint, ipsæ inter se sunt æquales.

Atque hæ duæ posteriores sunt Campani.

Ab vno puncto extra Circulum signato duæ tantùm lineæ ad contactum Circuli demitti possunt.

Libro Quarto.

AD V.

Per tria data puncta in directam lineam minimè constituta, Circulum ducere.

AD IX.

Quadratum Circulo circunscriptum, duplum est Quadrati eidem Circulo inscripti.

AD X.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum constituere.

Ad Librum Quintum nullas Propositiones addidimus, eodem quo neque ad Secundum, consilio. Quæ enim cum Numeris tam coniunctã habent rationem, sicut Secundi & Quinti materia, præter modum ampliari possunt, ac sine vsu. Quinetiam ab hoc Quinto rescindendæ potius essent Propositiones, quàm vllæ adiiciendæ: quod & nos illîc monuimus.

Libro Sexto.

AD IX.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem Medium datum dimidia parte lineæ datæ non esse maius.

AD XXIII.

Propositis duobus Parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ab vno illorum Parallelogrammum alteri simile resecare.

Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiem rectilineam inuenire.

AD XXXII.

Si, quæ ab vno laterum Trianguli fit Species, æqua fuerit iis quæ à duobus reliquis lateribus fiunt Speciebus similibus similiterq; descriptis: Rectangulum est ipsum Triangulum.





AD CAROLVM LOTHARINGVM, PRINCIPEM, CARDINALEMQVE AMPLISSIMVM,



Iacobi Peletarii Cenomani in Euclidis Elementa Geometrica Præfatio.



Olent, qui docendi munus profitentur, Cardinalis amplissime, multa de argumenti ipsius dignitate afferre: vt consilij suscepti rationem exponant, & animos hominum faciliùs sibi adiungant. Ego verò ad Geometriam accedens, præter officium & dignitatem mihi facere viderer, si ad eius commendationẽ, nimis exquisitum artificium adhiberem. Nam quum cæteræ artes probabili quadam opinione constent, certè Geometria (inter Mathematicas spectatissima) veritatis confirmatione seipsam tuetur & commendat. Quumq; res omnes aut ornatu amplificare, aut testimonio deprimere, aut deniq; circuitione inuertere possimus: hæc ipsa suo innixa præsidio, perpetua, simplex & vniusmodi est. Nulla huc controuersia, nulla disceptatio incidit, quæ non statim ad veritatis fidem probationemq; referatur. Eius quippe rationes non persuadent, sed cogunt: etiam ordine ipso, immò adeò Naturæ ductu quodam. Vt enim ab exiguis initijs, Natura ad operis perfectionem & absolutionem sensim peruenit: ita Geometria ab infimis ad altissima, rectè & gradatim sese extollit. Quid Puncto simplicius? quid Circulo absolutius? at ex illo omnia emanant, in hoc omnia concluduntur. Vt ne Puncto quidem desit infinitatis admiratio. Quid enim tam mirabile, quàm à medij Circuli puncto, quod Centrum vocamus, tot lineas exire, quot ad Peripheriam desinunt? Iam verò Problemata ipsa & Theoremata, quum alia ex alijs consequantur, rerum agendarum seriem nobis opportunè referunt: monentq; nihil præposterè, nihil sine consilio aggrediendum, sed omnia ad rationis normam esse dirigenda. Ad hæc, sicut Natura noui quippiam assiduè molitur, ita Geometria semper aliquid egregium dispicit, exquirit, excogitat. Quamobrem parum intelligenti sunt iudicio, qui Mathematicarum autoritatem eleuare conantur, tanquã eæ ad animi delectationem, non etiam ad vitæ vsum constitutæ sint. Nihil enim in rebus humanis ferè aliud est quod expediat aut iuuet, præter ordinem & proportionem: id est, in omnibus moderationem. Vbiq; igitur latet vis quædam Geometriæ: quæ vtrum plus naturæ

habeat

habeat an artificij, non satis perspici potest: nisi quatenus explicat ipsa exercitatio. In qua meditatione quanto maiores progressus fecerimus, tanto propiùs ad Deum accedere videmur. Ac quemadmodum Mens illa æterna, præteritorum meminit, præsentia cernit, futura perspicit, simul verò omnia amplectitur & moderatur: ita præclarus Geometriæ artifex suas cogitationes in vnũ collatas, ad rem suam cõuertit, et suum quendam Mundum vniuersa speculatione intuetur. In diuersis autem Figurarum formis, quæ rerum varietatem eximiè referunt, incredibilem concipit voluptatẽ. Quarum quæ speciem habent cõcinnitatis, rerum vsum et opportunitatem exhibent: quæ obscuram præ se ferunt compositionem, earum incommoditatem arguunt, & molestiam. Neq; tamen in Geometria quicquam tam anorme aut inuolutum existit, quod ad regulam dirigi non poßit, si adsit vis ingenij: Sicut in rerum natura nihil tam difficile aut intempestiuum videtur esse, quod non ad vsum conuerti poßit, modò non desit animi solertia. Omnia quippe aut ad vtilitatem, aut ad pulchritudinem, aut denique ad exemplum accommodantur: vt etiam quæ ad perniciem generis humani comparata sunt, bella, venena, morbi, cæteraq; exitiorum genera, cautiores nos efficiant, & rerum expetendarum vsus reddant suauiores. Porrò, Geometricæ positiones, quæ operas auxiliarias inter se præstant, omnia in rerum natura mutuis alternisq; subsidijs niti & consistere declarant. Quinetiam amicitiæ ipsius iura, in Figurarum similitudine, quarum colligationem Diameter efficit, conspicua sunt. Ad summam, hæc imago & facies Geometrica eiusmodi est, vt in ea Mundi quandam θεωρίαν poßis agnoscere. De cuius initijs huc nihil afferre constitui. Non ab Aegyptijs, non à Chaldæis, non à Phœnicibus, illius originem requiram. Scientias quippè æternas esse semper existimaui: atque vt in Mente diuina, ab æterno infixam fuisse Mundi constitutionem: sic disciplinas, cælestia quædam semina esse: quæ in nobis insita, & pro rata cuiusque portione exculta, fructum edunt. Sed hæc fortaße etiam longiùs à nobis ducta sunt, quàm instituti nostri ratio postularet: præsertim quum hæc ipsa in Commentarijs nostris sparsim exposuerimus. In rem igitur præsentem veniant oportet, qui Geometriæ dignitatem intueri & perpendere cupient. Eam Euclides noster quindecim Libris tradidit. Quorum sex illos qui Planorum tractationem continent, à nobis demonstratos, tuo nomini, Cardinalis amplißime, dicauimus: ne hoc quidem rerum tumultu, aut temporum conuersione deterriti. Nam & tu in summis grauißimisq; occupationibus, artium liberalium caussam, patrociniumq; singulari studio semel susceptum, nunquam deseruisti. Nostros autem labores si benignè & gratè, vt confidimus, exceperis: magnam nobis, etiam sponte currentibus, alacritatem dederis: vt eadem illa tui nominis nuncupatione, totus Euclides quàm poterit cultißimus, versetur inter manus hominum.

✶



IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER PRIMVS.

Principiorum explicatio.



RINCIPIA, sunt quorum nulla est causa. Ipsis enim, quatenus Principia sunt, nihil est prius. Atque ob id in disciplinis tanquam per se nota ponuntur: neque probationem recipiunt, sed probationum sunt fundamenta. Horum in Geometria triplex genus: Definitiones, Postulata seu Petitiones, & animi Notiones. Definitiones quidem naturali insitaq; intelligentia non statim concipimus: sed in eas, quum proponuntur, sponte consentimus: sic dictante rei cuiusq; natura. Quapropter à nonnullis Hypotheses dictæ sunt. Petitiones verò, quanuis prima specie non animaduertantur, tamen auditæ facilè conceduntur, sic dictante ratione. Atque hæ, vt plurimùm, ad Definitiones consequuntur. Sed animi Notiones in quoscunque etiam rudissimos cadunt. Qui igitur Definitiones & Postulata subterfugit, is doctrinæ non est capax. Nemo enim ad disceptationem de re aliqua ritè accedit, nisi prius conueniat quid sit id de quo sit disceptandum, atque in id consentiat quod ex concessis pendet. Sed qui Notiones non recipit, etiam sensu communi caret: vnde & animi sensa vocantur. Quur ergo Definitiones, quæ interim subobscuræ sunt, Notionibus præponuntur ab Euclide? Nimirum, quia licet Definitiones non adeò claræ sint: res tamen quæ definiuntur, sese omnium primas obiiciunt: ob idq; primas cognoscere cupimus, vt appareat Disciplinæ materia. Quum igitur in Geometricis animi Notiones, Quantitates respiciant: ideò Quantitates earumq; species definisse oportuit, vt esset in quo notionē animi exerceremus. Horum itaque ordo sic habet.



DEFINITIONES.



1 PVnctum, est quod partes non habet.

Geometria Magnitudines considerat, easq; finitas. Sed quia Magnitudinum partes, naturam totius denominationemq; retinent, partes enim Linearum, lineæ sunt: Superficierum, superficies: & Corporum, corpora: alioqui vaga & confusa esset rerum substantia: Geometria vbique infinitum deuitans (infiniti enim nulla est scientia) ab eo initium sumit, quo simplicius cogitari nihil possit: id verò Punctum vocamus. Nam quum in rebus externis aliquid sensui obiiceretur minimum: sanè rationabile fuit, intellectui quoque aliquid dari quo nihil esset minus. Punctum igitur in Geometria, propemodùm est quod in Arithmeticis Vnitas. Nam sicut Vnitas est Numerorum veluti supposita materia & origo, quæ Numerus non est: ita Punctum, Magnitudinis, quum magnitudo non sit. Illud autem habet mirabile, quòd quum diuisionem non admittat, est tamen cùm in rebus omnibus, tum in Geometria maximè momentaneum: Nihil enim ferè in vniuersa rerum conquisitione aliud spectamus quàm Punctum. Circuli centrum omnium primùm quærimus: Quantitates Punctis terminamus, metimur, & diuidimus: vt Punctum assequi, nihil aliud sit quàm scopum attingere.

Plato Punctorum hypostasin seu subsistentiam vocat adamantinam: nempe æternam, stabilem, incorruptibilem, quæq; eodem semper modo habeat: Vniuersum circa ipsa conuerti, ac circunquaque in plausum moueri. Eæ sunt Epicuri Atomi, omnium rerum semina.

Ab negatione autem definit Euclides Punctum, quòd ad simplicissimum deuenire non possimus, nisi siquid intelligamus quod magnum non sit: quippe neque longum, neque latum, neque crassum.

Punctum autem nonnulli à Signo sic distinguunt, vt Punctum dicant esse quod in medio est Figuræ: Signum verò, quod in termino, aut alibi quàm in medio. Sed nos hac curiositate contempta, vtrunque sine discrimine vnum & idem esse ponimus. Ex Puncti fluxu perpetuo in longum, gigni intelligitur Linea: Quæ sic definitur,

2 Linea, est longitudo latitudinis expers.

Magnitudinum prima est Linea: cui ex iis tribus quæ Puncto negatur, vnum inest: nempe longum. Hic enim sub latitudine crassicies auditur: quum crassum sine latitudine non sit.

Non igitur sicut ex accumulatis Vnitatibus fit Numerus, sic ex additis Punctis fit Linea: sed ex ipsorum fluxu continuo. Atque in hoc differt Continuum à Discreto, quòd Continuum infinitè diuidatur: neque ad Punctum vnquam deueniatur, vt in Discretis ad Vnitatem.

3 Lineæ autem limites, sunt puncta.

A Puncto Linea oritur, & in idem desinit. Sed hoc loco dubitatur quonam modo Puncta Lineæ sint limites, quum Circuli peripheria nullos terminos videatur habere. Sanè Puncta eius Lineæ limites dicuntur esse, quæ terminata est. Peripheriam verò, quatenus extrema non habet, Puncta non terminant. Extrema autem si ponuntur, ea nisi Punctis designari non possunt: aut saltem puncto vno, quod duorum vicem supplebit.

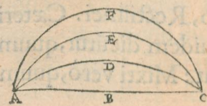
4 Linea Recta, est quæ ex æquali sua interiacet puncta.

Hæc generalis est definitio Lineæ rectæ: quæ etiam Lineæ ambienti, hoc est, quæ

Circ

Circulum claudit, tribui poteſt. Hanc enim Plato rectam quoque eſſe voluit: reliquas verò ex his duabus mixtas, obliquas vocauit. Quod nos ad decimamquintam Propoſitionem Libri Tertij probabilius oſtendemus. Circulo enim nihil ęqualius neque concinnius. Vbique tamen Euclides Rectum à Rotundo ſeu Peripheria diſtinguit: quod & nos obſeruabimus, diſciplinæ cauſſa.

Igitur Linea Recta, eſt à puncto ad punctum via breuiſſima: ſeu, vt Archimedes, minima linearum quæ eoſdem habent limites. Vt à puncto A ad punctum C, ducitur vnica linea recta A B C. Sed peripheriæ, quales A D C & A E C, infinitæ duci poſſunt.



Ac quemadmodum ex Puncti fluxu in continuum, exit Linea: ita ex Lineæ in tranſuerſum ductu, oritur Superficies: Quæ ſic definitur.

5 Superficies, eſt quæ longitudinem & latitudinem tantùm habet.

Superficiei vnum ex tribus abnegatur quæ Solido inſunt, nempe craſſum ſeu profundum. Hanc quidam definierunt terminum eſſe Corporis.

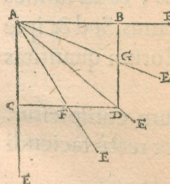
Ac tametſi, Punctum, Linea, & Superficies intellectu tantùm capi videantur, non re exiſtere, neque oſtendi poſſe: habet tamen vnumquodque horum in rerum natura quo repræſentetur. Puncta enim corpuſculis inſecabilibus aſſimilantur, quæ in radijs Solis colludunt: Lineæ radijs ipſis: Superficies vmbris, vt quæ terram nunquam ſubeant: ſeu etiam coloribus, ex Pythagoreorum ſententia. Puncta igitur, atomi ſunt: Lineæ materia: Superficies forma. Atque ex his Corpus, quod longum, latum, & craſſum eſt.

6 Superficiei extrema, ſunt Lineæ.

Hoc loco dubium mouetur ſimile quod & in terminis ipſius Lineæ: quur Lineas Superficiei extrema eſſe dicat Euclides. Nam ſuperficiei Sphæricæ vnica linea terminus eſt. Verùm qui ſuperiorem explicationem acceperit, is etiam in hac facilè conquieſcet. Superficies enim rotunda quomodocunque diuidatur: (ea autem diuiſio fit officio Diametri, aut lineæ cuiuſuis abſcindentis) ipſius limites erunt Lineæ. Eadem erit & terminorum Corporis, quæ Superficies ſunt, ratio.

7 Plana Superficies, eſt quæ ex æquali ſuas interiacet lineas.

Conuenit hæc Planæ Superficiei Definitio cum Rectæ Lineæ definitione. Quum itaq; recta linea Superficiei ex æquo incumbit, nempe quum omni variè accommodatur loco, ea eſt Superficies Plana. Vt, ſi in Superficie A B C D, linea A E ſuper puncto A fixo ſic circunducta fuerit per puncta C, F, D, G, vt ipſi Superficiei æqualiter incumbat, eamq; ſic radat, vt punctum nullum emineat, donec ipſa peruenerit ad A B lineam.



A plana igitur Superficie ſic excluditur ſphærica, ſeu rotunda, vt à recta linea excluditur Peripheria.

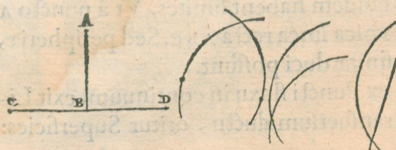
8 Planus Angulus, eſt duarum linearum in plano ſeſe tangentium alterius ad alteram inclinatio.

Hæc Anguli definitio antiquorum eſt, peruulgata: quam nos ad Decimâquintam Propoſitionem Tertij apertiùs declarabimus. Habet enim ſenſum tolerabilem & perſpicuum, donec illuc ventum erit. Nos interim tamen Angulum Planum ſimpliciter ſic definimus,

Angulus Planus, est duarum linearum in plano sectio.

Cessante enim sectione, cessat Angulus : vt illic probabimus.

9 Quando autem quæ angulum continẽt rectæ fuerint lineæ: Rectilineus Angulus vocatur.



Vt, si recta A B secet rectam C D: fiunt anguli A B C & A B D, Rectilinei. Cæteri autem Curuilinei quidem dicũtur, quum à duabus curuis fiunt: Mixti verò, quum à recta & curua.

10 Quum recta linea super rectam consistens lineam angulos utrinque æquales fecerit: rectus est vterque angulorum. Et quæ sic cadit linea, perpendicularis est ei super quam steterit.

Angulus Rectus à quibusdam definitur esse, qui sibi adiacentem angulum ab eadem linea factum, æqualem habet. Nos verò, vt etiam Quaternarium honoremus, Angulum Rectum esse dicemus, quartam partem sectionis duarum linearum rectarum. Quum igitur linea lineam secans in neutram partem inclinatur, fit angulus Rectus.

11 Obtusus angulus, est Recto maior:

12 Acutus verò Recto minor.

In centro Circuli à quo semidiametri exeunt, tres Angulorum Rectilineorum species expressæ sunt & conspicuæ. In Circulo enim A B C D, cuius centrum E, duæ semidiametri E C & E D in continuum ductæ, vnicam lineam C D Diametrum efficiunt: super quam stans semidiameter E A, diuidensq; Semicirculum C A D & totam C D Diametrum per æqualia, facit duos angulos A E C & A E D æquales: atque ob id rectos. Sed B E in eandem C D cadens, & Semicirculum inæqualiter secans, facit angulum B E D obtusum, vtpote recto maiorem, maioriq; peripheria comprehensum: Angulos autem A E B & B E C, acutos: quia recto minores, & sub minori ambitu contentos.

Neque quisquam miretur, quòd huc Circulum inducamus ante Circuli definitionem. Est enim Circulus Figurarum prima & vltima: omnia probans, & ad omnes ostensiones accommoda: vt nos in Demonstrationibus sparsim dicemus. Sed & ipse Angulorum præcipuus index: Nam ex peripheriæ portionibus, illorum quantitas sumitur, vt modò exhibuimus.

Ex hac igitur Recti & non recti positione, status conditioq; rerum conspicitur. Vnica est enim Recti constitutio: Obtusi & Acuti, infinitæ. Scilicet rectè faciendi vnica est ratio, & ad verum via vna: in diuersum, innumerabiles.

QVAESITVM est à nonnullis, esset'ne Angulus quantitas an qualitas. Nam Angulum, vt æqualis aut inæqualis dicitur, quantitatem esse volunt: vt autem rectus, obtusus, aut acutus est, qualitatem. Ego verò omnino Angulum vt quantitatem attendi debere puto. Nam etiam quatenus rectus, obtusus, aut acutus est, ipsius sola dimensio consideratur: quod & trium specierum definitiones declarant, quæ ab ęquali, maiori aut minori petuntur. Extra hæc, sese exerceant in Prædicamenti conquisitione, qui volent. Hũc enim Dialectica & Physica non pertinent.

AT LONGE maior difficultas est in ipsius Anguli forma & constitutione, cuiusm

iusmodi sit & in quo consistat. Nam quòd nonnulli dixerunt, Angulum partem esse Superficiei: id probabile non est. Nam sic ex Angulo Triangulum fieret, ducta tertia linea: quod minimè conuenit. Alij in Puncto, & in Linea, & in Superficie simul esse volunt. Sed hoc rursus maiorem disquisitionem parit. Quota enim ipsius pars in Puncto erit? quota in Linea? quota denique in Superficie? At si hoc quoque abest à veritate, quis erit Anguli situs? Nam si in Puncto tantùm consistere dicatur: aut erunt omnes Anguli æquales, aut Punctorum inæqualitas erit ponenda: quorum illud apertè repugnat veritati, hoc rationi minimè consentire videtur. Nihilo magis in Linea aut Superficie sola esse dicetur.

Huic igitur dubitationi, meo iudicio, sic occurrendum, Angulum quidem in vno puncto consistere: sed inclinationem esse quæ maiorem ipsum aut minorem efficit. Linea quidem lineam secans Angulum constituit: sed non propterea Angulus pars est Lineæ: sicut nec Lineæ ipsæ sunt Superficiei partes, quãuis sine Lineis Superficies esse non possit quæ ipsam terminẽt. Neque igitur Angulus pars erit Superficiei, quòd ipsam occludat. In quo sanè intueri licet, punctum ipsum sectionis, à linea secante premi & quodammodo angustius fieri, pro inclinationis modo. Punctum ergo erit quantitas? minimè. Intellectus enim quod semel minutissimum receperit, id ampliùs non diuidit: sed contrahere tamen & constringere nihil vetat. Ac nequis nos repugnantia dicere putet, is attendat in Geometria Punctum non considerari vt nihil: immò vt aliquid. Et vt in Arithmeticis Vnitatem minuimus, sic & Punctum suo modo in Continuis: scilicet vt id ex quo omnia emergunt, omnium etiam repræsentationem imaginemq; exhibeat: nempe recti, obliqui, longi, lati, & profundi. Quum igitur Geometria Naturam vbique referat, vt est ipsius speculum: cogitemus, sicut in angulo physico duæ lineæ quantunlibet tenues se mutuò non possunt scindere, nisi altera alteri cedat in puncto decussationis: ita in linearum Mathematicarum sectione recta, Punctum quodammodo esse quadratum: in obtusa, hebetius: in acuta, pressius & angustius. Atque hæc intellectus assequitur: qui nisi cum natura nunquam conquiescit. Vnde Puncti imminuendi finem non facit: donec linea cadens cum iacente vna facta sit. Quum itaque Punctum diuisionis expers esse intellectus ponit: id concipit, vt neque Linea, neque Superficies, neque Corpus sit. Sed quum ad Angulum deuenit, qui aliam omninò habet cõsiderationem à cæteris quantitatibus: tunc quod sine partibus receperat, id iam minuendum assumit: scilicet, vt, quod paulò antè diximus, id ex quo quantitas nascitur, naturam etiam quantitatis sapiat. Atque hæc nostra est de Anguli constitutione sententia. Diu enim nos exercuit hęc Puncti variatio: quam à nemine obseruatam inuenimus: & si modò obseruata sit, hactenus dissimulata est. Impedita enim res est in disciplinis ea, quæ quum apparet, demonstrationem non recipit. Quòd siquis hac in re habebit quod probabilius sentiat, huic libenter concedemus. Nihil enim inuestigandum nobis proponimus præter veritatem.

13 Terminus, est quod cuiusque finis est.

Quia Puncta, Linearum: Lineæ, Superficierum: Superficies, Corporum sunt termini: moxq; Figuram terminatam esse ponit: quid Terminus esset definire voluit: nempè vniuscuiusque rei finis.

14 Figura, est quæ sub aliquo vel aliquibus terminis continetur.

Circulus vno termino, nempè vna linea continetur, vt mox dicemus: sicut & Corpus sphæricum vnica superficie. Reliquæ autem figuræ, pluribus terminis: vt Triangulum, Quadrilaterum, ac deinceps planæ Figuræ: Prisma item, Cubus, Columna, Pyramis, & quæ sunt reliquæ solidarum.

Sed videbitvr fortassè cuipiam Euclides aliter hîc sentire quàm suprà

ſenſerit in Superficie. Eã enim dixit lineis, nõ vnica linea terminari. Verùm aliter conſideratur Circulus, vt Circulus eſt: & aliter vt Superficies. Si enim diuidatur Circulus: ipſius pars nulla Circulus erit: Superficiei verò partes, Superficies ſunt. Huius itaque Definitionis ſenſum ſic collige: vt Circulus, quatenus forma rotunda eſt, vnica linea contineri poſſit: ſed quatenus Superficies, pluribus: vt illîc docuimus.

Vel omnino rectius intelligemus Superficiem linea vel lineis terminari.

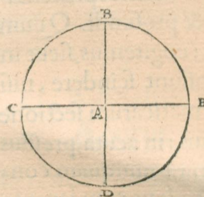
15 Circulus, eſt Figura plana, vna linea contenta quæ Peripheria appellatur: ad quam ab vno puncto introrsùm exiſtente omnes porrectæ lineæ ſunt æquales.

16 Punctum autem illud, Centrum Circuli vocatur.

Hæc Circuli definitio notiſſima eſt: quæ ipſius affectionem, ſeu, vt dicunt, paſſionem explicat. Siquis verò factionem ſeu creationem Circuli ſibi exponi petat, inſtar Definitionis Sphæræ quam Euclides libro vndecimo daturus eſt: ea erit huiuſmodi.

Circulus, eſt veſtigium lineæ rectæ in plano circunductæ, altero extremorum manente fixo, donec ipſa vnde duci cœpit, redierit.

Vt, ſi linea A B ſuper A puncto duci incipiat in orbem à puncto B, per C, D, & E puncta, donec ipſa rurſus A B facta ſit: deſcriptus erit Circulus B C D E. Atque ex hac deſcriptione, graphicè exprimitur tota Circuli proprietas. Punctum enim illud fixum A, Centrum dicetur: veſtigium verò à puncto B mobili circunſcriptum, Peripheria. Tota demùm linea A B circunducta, Superficiem deſcribit quæ Circulus dicitur. Vnde manifeſtum eſt omnes lineas à centro Circuli exeuntes, æquales eſſe: quum ſint ex vnius lineæ veſtigio.



NEQVE EST quòd quiſquam ſe fatiget inquirendo, vtrum ſit prius Rectum an Rotundum. Sed ſi quis ſententiam ferre cogatur: vt Philoſophus, rectè iudicabit, ſi vtrunq; ſimul eſſe pronuntiauerit. Nam & Circulus in plano rotatus, Rectum procreat. Menti quippè nihil prius neque poſterius. Immò puncta ante lineas: aut lineas ante Superficies: aut denique ſuperficies ante corpora fuiſſe, vix cogitatio ipſa complecti poteſt. Sicut apud Philoſophos, Vniuerſum aliquando non fuiſſe, captum animorum excedit: ſemper fuiſſe, ſupra omnem admirationem eſt. Nos autem, quantum cogitatione aſſequimur, omnia ſuo ordine ſtatuere, atq; ad artem reducere: conamur iudicio quoad eius fieri poteſt, probabili, minimeq; fallaci. Ordo enim in Diſciplinis dux certiſſimus. Sed nos hæc rerum varietas exercet: in qua ſatis nobis eſt coniecturam ad vſum accommodare. Quid enim nos efficere poſſe putamus arte, in ijs quæ Natura tam affabrè fecit? aut quid ingenio conſequi, quum de his quæ diuinitùs emanarũt, humanitùs iudicamus. Circulus igitur ex ſe ipſe ortus, ex Recto prouenire videtur: infinitus, ac finito ſimilis: omnia continens, vt capaciſſimus, & tamen aliquid extrà ſe in ſpeciem admittens. Sed nos in hanc rem aliâs vberiùs, Deo iuuante, philoſophabimur.

17 Diameter Circuli, eſt linea recta per centrum acta, quæ vtrinque ad peripheriam terminata Circulum bifariam diuidit.

Quum linea A B in figura modò inducta, peruenit ad punctum D oppoſitum: fit vna linea B A D: quæ Diameter eſt Circuli, ipſumq; bipartitò diuidit. Quod Thales Mileſius, qui Geometriam ab Ægypto in Græciam aduexit, primus animaduertit

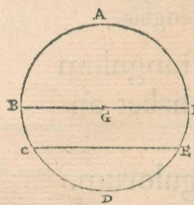
tit & probauit. Nam si linea per centrum acta, Circulum non diuidat bifariam: non erunt à centro ad ambitum extensæ lineæ, æquales.

Cæterùm Diameter, & Dimetiens Circuli & Quadrati dicitur: immò & Diameter Quadrilaterorum, nulla vocum curiositate: quanuis horum proprius sit Diagonius. Axis autem, Sphæræ & solidorum est: vt Coni, Cylindri, & Piramidis.

18 Semicirculus, est figura quæ sub Dimetiente & ea quæ à toto sublata est peripheria, continetur.

19 Sectio Circuli, est quæ sub recta linea & Circuli peripheria maiore aut minore Semicirculo, continetur.

In Circulo A B C D E, vtrauis Figurarum B A F & B D F, ex linea recta B F per centrum acta, & linea curua, quam subtendit, conflata, Semicirculus dicitur. Sed ex linea C E per centrum non transeunte, & peripheriam diuidente, fiunt duæ Figuræ inæquales: C A E, maior Semicirculo: & C D E, eodem minor: Atq; harum vtralibet, Sectio Circuli dicitur. Vtraque etiam peripheriarum C A E & C D F, Arcus: recta autem C E, Chorda vulgò appellatur.



Hæ tamen duæ Definitiones hûc non spectabant, sed ad tertium librum: nisi fortè Principia omnia, vniuerso operi communiter præscribenda dicamus: quæ tamen maluit Euclides in singulos libros distribuere: Atque ob id, hanc posteriorem in tertio libro repetit. Post Circulum, Figuræ Rectilineæ definiuntur.

20 Rectilineæ Figuræ, sunt quæ sub rectis lineis continentur.

21 Trilateræ, sunt quæ sub tribus rectis continentur lineis.

Figurarum Rectilinearum prima est Trilatera. Ex ipsius enim Rectæ lineæ definitione, non possunt duæ lineæ rectæ superficiem constituere: vnde neque figuram. Nam à puncto in punctum vnicus est ductus in rectum. Secunda verò in ordine est Quadrilatera.

22 Quadrilateræ, sunt quæ sub quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Quadrilateræ ad demonstrationes Geometricas accommodantur, sicut & Trilateræ, propter simplicitatem: ob idq; inter Principia definiuntur. Quæ verò quaternarium excedunt, obscuriorem habent tractationem.

23 Multilateræ sunt quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

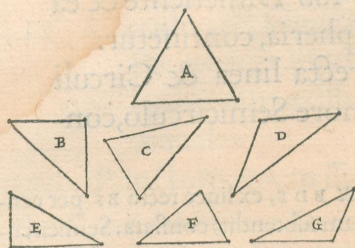
Rectilinearum Figurarum multitudo infinita est: quæ à numero laterum nomen habent. Sed generali vocabulo Multilateræ dicuntur.

24 Inter Trilateras porrò Figuras, Aequilaterũ Triangulum, est quod tria habet latera æqualia.

25 Isosceles autem, quod duobus lateribus æqualibus & tertio inæquali constat.

26 Scalenum verò, est quod sub tribus inæqualibus lateribus continetur.

His tribus postremis Definitionibus, tres Triangulorum species exponuntur. Harum prima, est Æquilateri. Nam quæ omni ex parte æqualitas est, simplicior, & cognitu facilior. Huic proxima est duorum laterum æqualitas, quæ basi inæquali subtenduntur. Atque hoc Triangulum Isosceles vocatur. Tertia species est, quæ vnum tantùm æquale habet: hoc est, tria inæqualia. Æquilaterorum vna est constructio: in ipsis enim perpetuò sunt anguli æquales. Sed in Isoscelibus & Scalenis, anguli infinitis modis variantur.



Æquilaterum est A. Isoscelia sunt B, C, & D. Scalena E, F, & G Triangula.

27 Ampliùs, Trilaterarum Figurarum Rectangulum Triangulum, est quod vnum rectum habet angulum.

28 Amblygonium, cuius obtusus est vnus angulorum.

29 Oxygonium, quod tribus constat acutis.

Rectangula sunt, B Isosceles, & E Scalenum: Amblygonia seu Obtusangula sunt, D Isosceles, & G Scalenum: Oxygonia seu Acutangula sunt, A Æquilaterum, C Isosceles, & F Scalenum. Æquilaterum perpetuò Oxygonium est. Reliquæ species Rectangulæ, Amblygoniæ, & Oxygoniæ esse possunt.

Post Trilateras sequitur Quadrilaterorum diuisio vniuersa: quarum perfectissima est Quadrata.

30 Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum, est quod æquilaterum & rectangulum est.

31 Altera parte longius, est quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum.

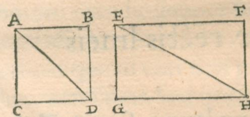
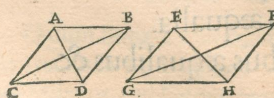


Figura Quadrilatera A B C D, cuius Diameter A D, est Quadrata: constatq; duobus Triãgulis Isoscelibus rectangulis, A B D & A C D. At Figura E F G H, cuius Diagonius E H, est altera parte longior: constatq; duobus Scalenis E F H & E G H, Rectangulis.

32 Rhombus, est figura quadrilatera æquilatera, sed non rectangula.

33 Rhomboides verò, est quæ ex opposito bina latera æqualia, binosq; angulos æquales habet: sed neque æquilatera, neque æquiangula est.

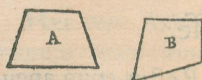
Rhombus, quatuor habet latera æqualia, duasq; Diametros inæquales: vt Quadrilaterum A B C D: atque hinc duos angulos æquales oppositos, obtusos: vt B A C & B D C: indè vero duos oppositos æquales, acutos: ut A C D & A B D.



At Rhomboides habet bina latera opposita æqualia. Vt in E F G H Figura, duo latera E F & G H opposita, inter

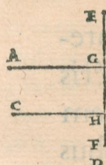
inter se sunt æqualia, duoq; E G & F H inter se. Cæterum in hoc conuenit cum Rhombo, quòd duas Diametros inæquales: binos item angulos oppositos æquales, hinc obtusos, illinc acutos habet.

34 Præter hæc autem reliqua Quadrilatera, Trapezia dicantur.



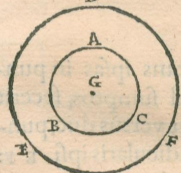
In his nulla est laterum definita æqualitas: sed promiscua constitutio: propter quod anormia sunt. Vt duo A & B Quadrilatera.

35 Paralleli, seu æquidistantes lineæ rectæ, sunt quæ in eodem plano existentes, in vtranque partem productæ neutrobi conueniunt.



Quum Recta linea, rectas lineas secans, ipsis æqualiter superstat, aut in easdem æqualiter inclinatur, vt quum anguli sectionum fuerint mutuò æquales: hæ lineæ sectæ, sunt Paralleli, seu Æquidistantes.

Vt si duas lineas A B & C D secet linea E F in punctis G & H: fueritq; angulus A G E æqualis angulo C H G, duæ A B & C D lineæ, erunt paralleli: quia in vtranuis partem protrahantur, nunquam concurrent.

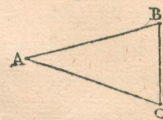


Lineæ autem Circulorum, Paralleli dicuntur, quæ super eodem centro ductæ sunt. Vt duæ lineæ A B C & D E F super eodem centro G, æquidistant inter se.

PETITIONES.

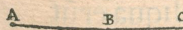
1 Ab omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere.

Duo puncta, vbicunque assignentur, in eodem plano esse intelliguntur: atque ob id, ab vno ad alterum via est aliqua breuissima. Quapropter à puncto A ad punctum B nemo negauerit lineam rectam duci posse: sic neque ab A ad C. Et quia eadem ratione B & C in eodem sunt plano: fit vt tria quælibet puncta in eodem semper existant plano. Ex quibus superficies Triangula conflabitur: qualis est A B C. Atque hæc est rerum colligatio. Hic enim binarius ternarium: ternarius quaternarium, immò & senarium includit: quum vnunquodque punctorum vice duorum sit. Quartum autem punctum erit septimum & aduentitium. Atque ideò ad superficiem conflandam, quarto puncto non est opus, quòd Senarius sit numerus perfectus.



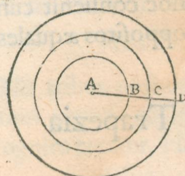
2 Rectam lineam terminatam in continuũ rectumq; producere.

Inter Quantitates non datur tam magna, quin maior dari possit: neque tam parua, quin minor. Rectam itaq; A B ad punctum C produci posse nemo nisi indocilis inficiabitur.



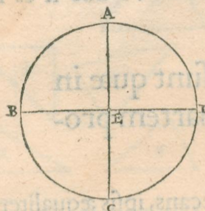
3 Omni

3 Omni centro & interuallo Circulum describere.



Superficies plana in ambitum extendi infinitè potest: sicut ab omni puncto in omne punctum recta linea duci: quò fit vt Circulus omni interuallo describi posse concedatur.

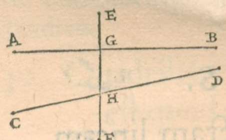
4 Omnes angulos rectos inter se æquales esse.



Hæc constat ex decima Definitione. Rectus enim angulus, fit quum recta linea in rectam lineam ad prependiculum cadit: hoc est, æqualiter ipsi superstat. Id verò ex Circuli centro euidentissimè apparet. Vt ex A B C D, qui duabus Diametris se in E centro secantibus diuiditur in quadrantes, qui quatuor angulos qui ad E, subtendunt æquales, quia rectos.

5 Quum in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores & in eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit: rectas lineas productas tandem concurrere ad eam partem in qua anguli duobus rectis minores existunt.

Vt si in rectas lineas A B & C D, recta incidens E F, & secans ipsas in punctis G & H, duos angulos interiores B G H & D H G simul sumptos, fecerit duobus rectis minores: ipsæ rectæ lineæ A B & C D concurrent versùs duo puncta B & D. Si enim ponatur B G perpendicularis ipsi E F: Scilicet anguli qui ad G, recti: sit autem D H G minor recto: erit D H inclinata super E F versùs E: Atque ob id, angulus D H G minor angulo D H F, ex conuersione Decimæ Definitionis: sicq; minor recto: quoniam si esset æqualis, vterque esset rectus, per eandem Definitionem: cuius contrarium hîc ponimus. Igitur ob inclinationem, ipsa C D producta tandem conueniet cum A B: idq; ob eam causam, quòd duo anguli B G H & D H G, duobus rectis sunt minores.



HOC TAMEN Postulatum inter Definitiones reponi poterat. Exponit enim lineas non parallelos, sicut decima Definitio Parallelos. Ad hæc, quum in speciem Theorematis enuntiaretur: nos in Postulatum redegimus.

ANIMI NOTIONES.

1 Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia.

2 Et si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.

3 Et si ab æqualibus æqualia auferantur: quæ relinquuntur erunt æqualia.

4 Et si inæqualibus æqualia adiiciantur: tota erunt inæqualia.

5 Et si ab inæqualibus æqualia auferantur: reliqua erũt inæqualia.

6 Quæ

6 Quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.
7 Et quæ eiusdem sunt dimidium, inter se sunt æqualia.
8 Quæ inter se ipsa conueniunt, & inter se sunt æqualia.
9 Totum est sua parte maius.
10 Duæ rectæ lineæ Superficiem non concludunt.

Hæc verò Axiomata per se sic manifesta sunt, vt nulla ostensione indigeant. Horum tamen vltimum quidam in ordine Postulatorum posuerunt: neque omninò absque ratione. Nam & Postulati naturam sapit: & ad definitionem Rectæ Lineæ consequitur, vt iam antè monuimus. Sed in hoc non insistemus. Vtrobique enim Principij notissimi vim habet.

De Hypothesi, Demonstratione, Problemate, & Theoremate.

✶



Ypothesis, quantùm huc attinet, est subiectio, seu fundamentum ratiocinationis. Hanc re existere non est necessarium : probabilem esse satis est:eamq; legem duntaxat habet,nequid absurdi importet. Vt quum conuenerit Figuram Figuræ esse æqualem, aut maiorem, atque ex hoc deducatur argumentatio : ea æqualitas aut inæqualitas, Hypothesis est : A qua discedere, constante argumentatione, non licet. Demonstrationem verò appellant Dialectici, Syllogismum qui faciat scire : nempè qui ex probatissimis concludat. Atque hæc à Geometria ortum habet. Immò omnis quæ ad verùm perducit probatio, Geometrica est. Vt verissimè dictum sit, neminem scire verum à falso distinguere, cui Euclides non fuerit familiaris. Quòd siquis attentius sciscitabitur, quur in Demonstrandis Propositionibus non eluceat forma Syllogismi, sed tantùm concisa quædam membra Syllogismorum appareant : is sic habeat, præter dignitatem esse, quæ in scholis docentur, ea quum in rem præsentem ventum sit,ex præscriptis formulis obseruare. Neque enim Orator, quum ad forum accedit, quæ à Rhetore excepit dictata, in digitis collocat : immò id agit, vt quum præceptorum maximè meminit, nihil minus quàm Rhetoricen cogitare videatur. Sic in opere Geometrico, quum nil aliud spectemus quàm vt scopum exquisitè assequamur : Syllogismi figuram omninò dissimulamus. Quæ tamen si exigatur, è probationibus Geometricis ad viuum exprimitur. Sed nos ea resecamus, quæ repetita non modò tædium, sed etiam obscuritatem parerent. Quod inter Demonstrationes facilè perspicient qui iudicio prædìti erunt. Demonstrationum autem conclusiones, sunt Problemata & Theoremata.

Problemata, ortus Figurarum comprehendunt, sectiones, additamenta : eaq; omnia in arte, quæ facienda proponuntur. Atque, vt in Philosophia, Problemata dicuntur dubia quædam quæ nobis examinanda & soluenda proponimus : sic in Geometricis, Problemata vocamus constructiones ex arte depromptas : à quibus speculationes oriuntur, seu Theoremata : nempè quæ factas Figuras comitantur, proprietates & affectiones : quæq; scientiæ ipsi inhærent & ipsam efficiunt. Nam in assertione consistunt præceptorum sicut Problemata in constitutione Figurarum. Ad summam, Problemata materiam quandam praxinq; artis referunt : Theoremata, formam, scientiæq; meditationem. Ex vtrisque Euclides Elementa Geometrica contexuit, vt operi vicissim subseruiebant, ordine quidem concinniori quàm ante illum quisquam : licet neque Archimedes, neque Ptolemæus, neque vllus antiquorum se ordini astrinxerit : nimirum quòd institutiones Geometricæ tam integræ dari vix possint, quin aliquid desiderari, aut superesse, aut conuenientiorem collocationem exigere videatur. Geometria enim perpetuam meditationis materiam alit. Sed hæc in aliud tempus reponimus. Nunc Euclidem ex professo ducem sequemur.

PROBL

PROBLEMA PRIMVM,

PROPOSITIO PRIMA.

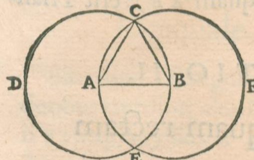


Vper data recta linea, Triangulum æquilaterum constituere.

Triangulum, aut aliam quanuis Figuram super data linea constituere, est ex ipsa linea vnum latus Figuræ facere.

Sit data linea, A B. Volo super A B constituere Triangulum æquilaterum.

Centro quidem A, spatio verò A B, describo Circulum B C D E, per tertiam Petitionem: Rursusq; centro B, & eodem spatio B A, describo alterum Circulum A E F C. Atque hi duo Circuli se mutuò secabunt in duobus punctis, vt in E & C: quum vtriusque communis sit Semidiameter A B. A duobus igitur terminis A & B, ad alteram intersectionum, vt ad C, duco A C & B C lineas, per primam Petitionem. Dico iam A B C Triangulum super A B linea constitutum, esse æquilaterum.



Quoniam enim A B & A C exeunt à centro A ad peripheriam B C D E: erit per Centri & Circuli definitionem, A C ipsi A B æqualis. Rursus, quoniam B A & B C exeunt à centro B ad peripheriam A E F C: erit, per eandem Definitionem, B C eidem B A æqualis. Duæ igitur A C & B C vni A B sunt æquales: ob idq;, per primam animi Notionem, tres A B, A C, & B C inter se sunt æquales. Quare A B C Triangulum super A B linea constitutum, est æquilaterum, Quod faciendum fuit.

PVLCHRE Euclides primam ac simplicissimam Figurarum cum vltima & capacissima coniunxit: scilicet Triangulum cum Circulo. Vtriusq; enim vsus immensus: Trianguli, ob simplicitatem: Circuli ob perfectionem. Æquilateri verò duntaxat meminit, quòd hæc Trianguli species eadem semper sit & vniusmodi, ob laterum & angulorum æqualitatem: Reliquas duas species prætermisit, Isosceles & Scalenum. Infinitæ enim eorum figuræ.

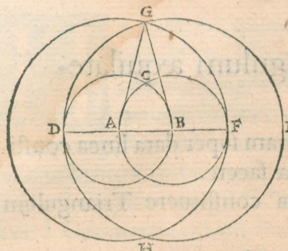
Id vnum tamen non omittam, Trianguli Isoscelis longè maximum esse vsum. Nam quum in Geometricis omnia ferè æqualitate & recto probentur, duorum autem æqualitas satis sit ad tertium quippiam demonstrandum: quæcunque Demonstrationes fiunt Trianguli Æquilateri adminiculo, eæ quoq; per Isosceles absoluuntur: Isosceli verò rectus angulus inesse potest, Æquilatero nunquam. Quumq; Triangula nil aliud sint quàm dimidiæ partes Quadrilaterorum: Isosceles, dimidium erit Quadrati, Æquilaterum verò minimè, sed solius Rhombi. Æquilaterum quidem hoc habet priuilegij, quòd tres ipsius anguli perpetuò sint æquales: Isoscelis nunquam, sed duo tantùm. Tres item anguli cuiuslibet Æquilateri, tribus semper alterius Æquilateri singulatim æquales, quanuis singula vnius latera, singulis alterius lateribus sint inæqualia. Sed hæc ad demonstrationes parùm conferunt. Præcipuus igitur Æquilateri vsus, est in solidis: sed in superficiebus ferè nullus, nisi fortè ad Figuras Circulo inscribendas, vbi etiamnum vt Isosceles consideratur. Hac nos ratione inducti, Appendicem Campani nō omisimus, quatenus Isosceles Triangulum super data linea collocandum proponit. Scaleni verò positionem, vt inutilem neglеximus.

Super data recta linea, Triangulum Isosceles constituere.

Manente eadem Æquilateri descriptione, protrahatur linea A B data, donec vtrinque pertingat peripherias Circulorum in punctis D & F. Tum centro A, spatio

 tio

tio verò A F, deſcribatur Circulus F G H: rurſusq; centro B, ſpatio verò B D, deſcribatur alter Circulus D G K: quorum vterque alterum ſecabit in duobus punctis, vt in G & H. non ſecus quàm in ſuperiori deſcriptione. A punctis itaque A & G duco lineas A G & B G. Dico Triangulum A B G ſuper A B linea conſtitutum, eſſe Iſoſceles.

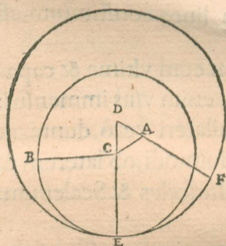


Quum enim A B & A D lineæ ſint æquales, nempè vtraque à centro ad peripheriam: eademq; ratione, B A & B F æquales: erunt duæ A D & B F inter ſe æquales, per primam animi Notionem. Quapropter, addita communi A B, erunt per ſecundam Notionem, A F & B D æquales. Sed A G ipſi A F æqualis, vtraque enim à centro ad peripheriam: quapropter & eadem A G ipſi B D æqualis. Atqui B G ipſi B D eſt æqualis, ex ipſa Centri & Circuli definitione. Duæ igitur A G & B G vni B D ſunt æquales: ob idq; inter ſe æquales, per primam animi Notionem. Quare, quum vtraque maior ſit quàm A B (maior enim eſt B D quàm A B): erit Triangulum A B G Iſoſceles, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ducere.

Sit datum punctum A, data verò linea recta B C. Volo ad A punctum, ipſi B C rectæ lineæ æqualem lineam ducere. Alterum terminorum ipſius B C connecto cum puncto A: ſcilicet terminum C, ducta, per primam Petitionem, recta linea C A. Tum cenrro C, interuallo verò C B, deſcribo Circulum B E B, per tertiam Petitionem. Cuius peripheria ſi tranſeat per punctum A, habeo quod volui: Erit enim per Centri definitionem, C A ipſi C B æqualis. Sin aliorsùm tranſeat: conſtituam ſuper C A, Triangulum ęquilaterum A C D, per primam Propoſitionem, (ſeu Iſoſceles, per ea quæ illîc addidimus, nihil enim refert, modò A D & C D latera ipſius ſint æqualia): Cuius latus D C protraham ad punctum E peripheriæ. Tum centro D, interuallo autem D E deſcribam alterum Circulum E F E: & ad punctum F ipſius Peripheriæ protraham latus D A. Dico A F eſſe ipſi B C æqualem.



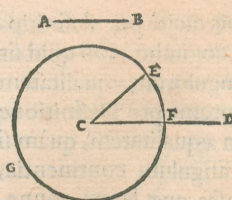
Duæ enim C B & C E ſunt æquales: quum ſit vtraque à centro ad peripheriam. Duæ item D E & D F, eadem ratione æquales. Sed D C & D A æquales, ex conſtructione: quum ſint latera Trianguli Æquilateri: aut Iſoſcelis ſi placet. Si itaque auferantur D C & D A æquales, ex D E & D F æqualibus: remanebunt, per tertiam animi Notionem, C E & A F æquales. At B C ipſi C E oſtenſa eſt æqualis. Duæ igitur B C & A F ipſi C E æquales: ob idq; & inuicem æquales, per primam animi Notionem. Quare ad punctum A, ducta eſt F A ipſi B C æqualis, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, à maiori lineam minori æqualem abſcindere.

Sint duæ lineæ A B & C D inæquales, quarum minor A B. Volo ex C D abſcindere partem ipſi A B æqualem.

Ad



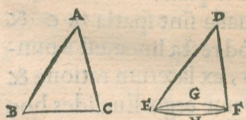
Ad punctum C duco E C ipsi A B æqualem, per secundam Propositionem. Ac centro C, interuallo verò C E, describo Circulum E F G: qui secabit maiorem C D in aliquo puncto: & secet in F. Dico C F esse æqualem A B.

Est enim ipsa æqualis lineæ C E. Sed & A B eidem C E æqualis. Quare, per primam Notionem, C F æqualis A B, Quod erat faciendum.

THEOREMA I, PROPOSITIO IIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, & angulos binis æquis lateribus contentos æquales: basis quoque basi æqualis erit, ac reliqui anguli ęquis lateribus contenti mutuò æquales: totum denique Triangulum toti Triangulo æquale.

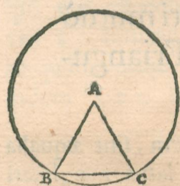
Sint duo Triangula A B C & D E F, quorum vnius duo latera, sint æqualia duobus lateribus alterius: scilicet latus A B æquale lateri D E: & latus A C lateri D F: sitq; angulus A æqualis angulo D. Dico basin B C basi E F esse æqualem: Angulum item B angulo E, & angulum C angulo F: ac totum Triangulum toti Triangulo æquale.

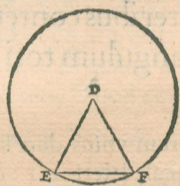


Superponam Triangulum A B C, Triangulo D E F: vt angulus A cadat super angulum D, latusq; A B super latus D E, & A C super D F. Eritq;, per octauam animi Notionem, vt nec anguli nec latera sese excedant. Cadent nanque duo puncta B & C super duo E & F. Sicq; linea B C super lineam E F cadens, erit ipsi æqualis: atque ea ratione angulus B æqualis angulo E, & angulus C angulo F: & totum Triangulum toti Triangulo æquale: quum inter se sic conueniant. Nam si non congruat linea B C cum linea E F, congruentibus punctis B & C ipsis E & F punctis: sed cadat intra Triangulum, vt linea E G F: aut extra, vt linea E H F: duę lineæ claudent superficiem, contra vltimam animi Notionem. Quare duo Triangula A B C & D E F omni ex parte inter se æqualia, Quod fuit demonstrandum.

HÆC EST vulgata omnium Interpretum Demonstratio, si modò hæc Demonstratio dici debeat. Nam si linearum figurarumq; superpositiones in probationem recipiamus, tota ferè Geometria huiusmodi applicationibus erit referta: vixq; vlla occurret Propositio, quæ hac ratione non possit probari. Secunda enim iam indè ac tertia, quas modò demonstrauimus, sic probari poterant. Nam si ad datum punctum, linea datæ lineæ æqualis ducenda sit: illicò translata linea ad ipsum punctum, absolutum erit negotium: Applicatio verò quanuis superpositione sit tolerabilior, tamen in Geometria repudiatur: immò ne lineam quidem transportare licet, vt secundùm ipsius magnitudinem, Circulum describamus: quin prius æqualis linea ducta sit. Alioqui secunda prorsus vacaret. Tum si à maiori linea, minor sit abscindenda: quid aliud quàm maiori minorem superponemus, vt quod superat resecemus? Sed hoc quàm sit à Geometriæ dignitate alienum, eorum iudicio relinquo qui Demonstrationis vim & energiam animo concipiunt. Quid ergo huc afferemus, vt Euclidem à reprehensione vindicemus? Neque enim ex tam paucis quas hactenus præmisit, Propositionibus, hoc Theorema confirmari posse videtur. Huic obiectationi, meo iudicio, sic occurri poterit: vt dicamus, hoc Theorema per se clarum esse, neque probatione egere: sed Definitionis cuiusdam loco habendum

esse. Nam quum de re aliqua sermonem instituimus: ea nobis tacitè per definitionem subit in animum: Non enim duos angulos æquales esse cogitabo, nisi quid sit æquales esse angulos concipiam. Quod respiciens Euclides, angulorum æqualitatem proponere, atque eadem opera definire voluit: vt hoc Theorema pro Definitione haberemus. Nemo enim significantius explicabit angulorum æqualitatem, quàm si dixerit duos angulos æquales fieri, quum duo latera vnum angulum continentia, duobus alterum angulum continentibus fiunt æqualia, & bases quæ latera connectunt, æquales. Constat enim angulum tantum esse, quanta est duarum linearum ipsum continentium apertio, seu diductio, hanc verò tantam esse, quanta est basis, hoc est, linea ipsas connectens. Atque vt clarè dicam, tantus est angulus B A C, quanta est remotio lineæ A C ab ipsa A B: tanta verò efficitur remotio, quantam exhibet linea B C. Hoc autem in Isoscelibus est euidentius. Sint enim duo Isoscelia A B C & D E F: quorum vnius duo latera A B & A C duobus D E & D F alterius sint ęqualia: angulusq; A angulo D. Ac positis centris in A & D punctis, ducantur duo Circuli: prior secundum A B, alter secundum D E spatium. Horum prior manifestò transibit per B & C: alter verò per E & F puncta: quum A B & A C, itemq; D E & E F sint æqualia, & à centro vtrinq; exeuntia. Atque, ex definitione æqualium angulorum, erunt arcus B C & E F æquales. Angulorum enim magnitudo designatur ex arcubus Circulorum qui per extremas lineas quæ angulos continẽt, transeunt. Ac conuerso modo, æquales anguli atque æqualibus lineis comprehensi, æquales subtendunt peripherias. Quum enim æqualia sint spatia B C & E F, ea æqualibus rectis lineis claudi oportet: propterea quòd recta linea, est à puncto ad punctum via breuissima. Atque haud dissimili iudicio, ex laterum ratione & basium, quanta sit angulorum magnitudo æstimabimus. Quur ergo Euclides hoc inter Theoremata reposuit, non inter Principia præmisit? Nimirùm, quum speciem quodammodo mixtam Principij & Theorematis præ se ferret: Principij, quòd in communi animi iudicio consisteret: Theorematis, quòd speciatim Triangula Triangulis comparanda proponeret: maluit Euclides inter Theoremata referre: præsertim quum multa haberet capita, Principium verò simplex ac velut nudum esse debeat. Ex hoc prætereà Axiomate tanquam ex locupletissimo Demonstrationum themate, multæ Propositiones consequi debebant, eiusdem propè facilitatis & iudicij: quas, quia erant notissimæ, inter Principia annumerari non conueniebat. Paucis enim Principijs Geometriam contentam esse oportebat: immò multa Principia consultò supprimuntur, ne sit onerosa multitudo: vt etiam quæ exprimuntur, tantùm ad exemplum exprimi videantur. Hùc accedit, quòd primum Theorema facile, perspicuum, ac sensui obuium esse debebat, pro Geometriæ lege, quæ ex paruis humilibusq; initijs, in progressus mirabiles sese extollit.



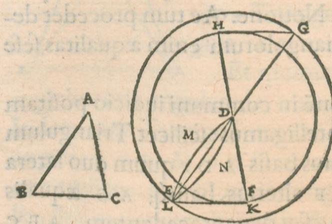


Huius itaque Propositionis veritatem non aliunde quàm à communi iudicio petemus: cogitabimusq; Figuras Figuris superponere, Mechanicum quippiam esse: intelligere verò, id demùm esse Mathematicum. Iam verò quum fuerit confessum duo Triangula inuicem esse æquilatera, ipsa quoque inter se æqualia fateri erit necessarium. Etenim nulla euidentiori specie æqualitas Figurarum dignoscitur, quàm ex laterum æqualitate: quanquam Circulorum æqualitas ex diametris definitur: sed non aliam ob causam, quàm quòd linea obliqua sui copiam adeò apertè non facit vt recta: Cuius mensuram facilè capimus, ac per eam, obliquarum inter se comparationem facimus.

At si hæc superpositio aliqua ratione admittenda sit: tolerabilior sanè fuerit hoc qui sequitur modo.

Manente duorum Triangulorum A B C & D E F conditione, continuabo E D vsque

vſque ad G punctum, per primam Petitionem: & ponam D G æqualem A B, per ſecundam Propoſitionem. Atque itidem continuata F D, ponam D H æqualem A C. Tum ſuper puncto D, ducam duos Circulos: alterum ſpatio D G, alterum ſpatio D H. Quorum prior manifeſtò tranſit per punctum E, quum ſint D E & D G æquales: alter verò per punctum F, ob eandem rationem. Iam à puncto D duco lineam rectam D L ad E punctum: quæ omninò tranſibit ſuper D E. Nam ſi extrà tranſeat vt D M L aut D N L: duæ rectæ lineæ concludent ſuperficiem, contra vltimam animi Notionem. Itidem ab eodem D puncto, ducam lineam D K: quæ etiam efficietur eadem cum linea D F. Ac demùm Linea L K ducta efficietur eadem cum linea E F. Iam verò manifeſtum eſt lineam D L eſſe æqualem lineæ D G, ac propterea ipſi A B, ex conſtructione & animi Notione: lineam quoque D K eſſe æqualem D H, ſeu A C: atque angulum L D K eſſe æqualem angulo D E F, immò eundem: ac propterea æqualem angulo B A C: ſpatiumq; comprehenſum à lineis D L & D K, eſſe omninò æquale ſpatio comprehenſo à lineis A B & A C. At ſpatium L D K clauditur linea æquali, immò eadem cum linea E F. Et ſpatium igitur B A C claudetur linea æquali ipſi E F lineæ. Quare æqualis E F ipſi B C, Quod erat demonſtrandum.



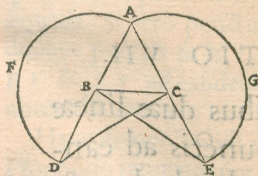
Hinc patent reliqua Theorematis capita: nempè reliquorum angulorũ inter ſe, & duorum Triangulorum æqualitas. Neq; eſt quòd contendat quis, eandem eſſe vtrobique rationem applicationis Triangulorum. Aliud nanque eſt, Triangula tranſponere, quàm per ſimile & æquale demonſtrare. Probatio enim hæc vltima è Circuli pendet officio.

THEOREMA 2, PROPOSITIO V.

Iſoſcelium Triangulorum qui ad baſin ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus lineis, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe quoque ſunt æquales.

Sit Triangulum A B C, cuius duo latera A B & A C ſint æqualia. Dico angulum A B C æqualem eſſe angulo A C B: Et ſi protrahantur A B & A C, vt ad D & E puncta: angulum D B C æqualem eſſe angulo E C B.

Ponam, per tertiam Propoſitionem, lineam A D æqualem lineæ A E: ductiſq; D C & E B, intelligam duo Triangula A B E & A C D. Et quoniam duo latera A B & A E Trianguli A B E, ſunt æqualia duobus lateribus A C & A D Trianguli A C D: & angulus A vtrique communis: erit, per antecedentem, baſis B E, baſi C D æqualis: & angulus E angulo D, angulusq; A B E, angulo A C D. Rurſus intellectis duobus Triangulis B C D & C B E, erunt duo latera B C & C D Trianguli B C D, æqualia duobus lateribus C B & E B Trianguli C B E. Et quia angulus D vnius æqualis eſt angulo E alterius, vt iam probauimus: erit, per antecedentem, B C D Triangulum, ipſi C B E Triãgulo æquale: ac propterea angulus B C D, angulo C B E æqualis. Quum itaque totus angulus A B E probatus ſit toti angulo A C D æqualis: ablato B C D à toto A B E, ablatoq; C B E à toto A C D: ſupererunt A B C & A C B anguli, per communem Notionem, æquales, Quod eſt prius. Et quoniam, per ipſam antecedentem, angulus B C E ipſi C B D angulo eſt æqualis: patet ſecundum.



Atque vt oſtenderemus quantum poſſit vbique Circulus, deſcripſimus A F D ſe-

micirculum, ſecundùm ſpatium B A: cuius centrum B: & alterum A G E, ſecundùm ſpatium C A: cuius centrum C. Nam integros Circulos deſcribere non erat neceſſarium. Vbi, ex Centri & Circuli definitione, conſtat lineas A B, B D: A C & C E æquales eſſe inter ſe: quum exeant à centris Circulorum æqualium: ac propterea A B & A E æquales inter ſe, ex communi Notione. Ac tum procedet demonſtratio modò poſita, meo iudicio facilior. Triangulorum enim æqualitas ſeſe euidentiorem exhibet.

H I C etiam obiter monebimus hanc Propoſitionē in communi iudicio poſitam eſſe, vt ſuperiorem. Nam ſi duo Triangula pro vno intelligamus: ſcilicet Triangulum A B C, cuius baſis A C: & Triangulum A C D, cuius baſis A D: quum duo latera A B & B C vnius, ſint æqualia duobus A C & C B alterius, baſiſq; A C æqualis baſi A B: erit, ex definitione æqualium angulorum, ſeu per antecedentem, A B C angulus, æqualis A C B angulo, Quod eſt prius. Tum, ex poſteriori noſtra conſtructione, de duobus angulis B C E & C B D idem erit iudicium: quum probatæ fuerint baſes B E & C D æquales.

THEOREMA 3, PROPOSITIO VI.

Cuiuſcunque Trianguli duo anguli æquales fuerint: duo quoq; latera illos angulos ſubtendentia, æqualia erunt.

Hæc eſt Conuerſa prioris partis antecedentis Propoſitionis. Sit Triangulū A B C, cuius duo anguli B & C ſint æquales. Dico latus A B eſſe æquale lateri A C.

Nam ſi æqualia non ſint: maius ſit A B, ſi fieri poſſit: à quo reſcindatur D B æquale ipſi A C, per tertiam Propoſitionem: vt ſint duo Triangula A C B & D B C. Et quoniam duo latera D B & B C, Trianguli D B C, ſunt æqualia duobus lateribus A C & C B, Trianguli A C B: & angulus B æqualis angulo C toti, ex hypotheſi: erit per quartam, baſis B C, baſi A B æqualis: & angulus D C B angulo A B C æqualis. Quare quum angulus A C B, angulo A B C ſit poſitus æqualis: erit, per primam animi Notionem, angulus D C B, angulo A C B æqualis, pars toti: quod eſſe non poteſt.

A N I M A D V E R T E N D V M, Conuerſas Propoſitionū in vniuerſum eſſe veras, ſicut & Principiorum. Quum enim dicimus, Quæ ſunt vni æqualia, inter ſe ſunt æqualia: ſimul cognoſcimus, ſi vnum quippiam fuerit duobus æquale, hæc duo inter ſe æqualia eſſe: Et, Si duo reliqua æqualia fuerint, & partes ab vtraque ablatæ æquales: tota quoque conſtat fuiſſe æqualia. Horum itaque Conuerſas reticuit Euclides vt notiſſimas: Propoſitionum verò expreſſit, quòd minus ſimplices eſſent, neque magis per ſe notæ quàm Directæ ipſæ: Deinde, quòd non ſtatim ad ſuas Directas conſequerentur, vt ad Principia ſuæ: & nonnunquam externis probationibus egerent, vt in ſequentibus paſſim occurret.

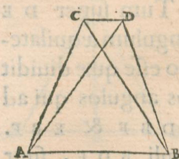
THEOREMA 4, PROPOSITIO VII.

Si à duobus punctis lineam terminantibus duæ lineæ exeuntes, concurrerint: ab iiſdem punctis ad eandem partem duæ aliæ non educentur, his duabus, & vtraque ſuæ conterminæ, æquales.

Sit linea A B, à cuius terminis A & B, exeant duæ lineæ A C & B C concurrentes ad punctum C. Dico duas alias lineas, vt A D & B D, ab iiſdem punctis A & B, & ad eandem partem, educi non poſſe, quæ duabus A C & B C vtraque ſuæ conterminæ æquales ſit: ſcilicet A D ipſi A C, & B D ipſi B C.

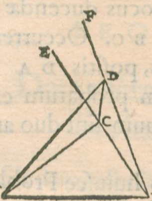
Quòd

Quòd si fieri possit, tum concurrent A D & B D intra Triangulum A B C, aut extra (neque enim in A C aut B C concurrent. esset nanque pars toti æqualis). Si ergo concurrant extra Triangulum: aut altera illarum secabit Triangulum, aut neutra. Et secet prius altera, nempe A D, Trianguli latus B C: & connectatur C D: vt duo sint Triangula A C D & B C D.



Et quoniam Trianguli A C D, duo latera A C & A D sunt æqualia: erit angulus A C D æqualis angulo A D C, per quintã Propositionem. Itidem quia Trianguli B C D, duo latera B C & B D sunt æqualia: erunt duo anguli B C D & B D C æquales. Et quia angulus B D C est maior angulo A D C: erit angulus B C D maior angulo A C D: per animi Notionem: Nam si duo æqualia, sint maiora tertio: erunt & maiora eo quod ipsi tertio est æquale. Erit igitur pars maior toto, Quod fieri non potest.

Si verò neutra secuerit Triangulum: connectam D C: & producam B C & E D ad E & F puncta, vt duo sint anguli E C D & F D C, sub basi C D.

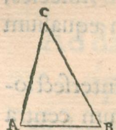


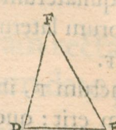
Et quoniam duo latera A C & A D Trianguli A C D, sunt æqualia: erunt anguli A C D & A D C, per quintam Propositionem, æquales. Rursus quia duo latera B C & B D Trianguli B C D, sunt æqualia: erunt duo anguli E C D & F D C sub basi, æquales, per alteram partem eiusdem. Quia ergo angulus E C D minor est angulo A C D: erit angulus F D C minor angulo A D C, totum parte. In idem absurdum intrudetur, siquis A D & B D dixerit conuenire intra Triangulum.

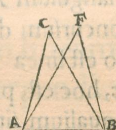
THEOREMA 5, PROPOSITIO VIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, & basin basi æqualem: angulos quoq; illis æquis lateribus cõtentos æquales habebunt.

Sint duo Triangula A B C & D E F: sitq; latus A C æquale lateri D F, & B C æquale E F: basisq; A B æqualis basi D E. Dico angulum C esse æqualem angulo F, & angulum A angulo D, & angulum B angulo E.







Superposita enim basi A B ipsi D E basi, neutra excedet alteram: quum sint æquales. Tum si angulus C conuenit cum angulo F: erit totum Triangulum toti Triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, per quartam Propositionem: quum sint duo latera A C & B C, duobus D F & E F æqualia. Si verò punctum C non cadat super F punctum, sed cadat extra: tunc à duobus punctis D & E, duæ lineæ exeuntes A C & B C, concurrent: simulq; D F & E F ad eandem partem, binæ suis conterminis erunt æquales, Quod per antecedentem fieri non potest.

Hanc demonstrandi rationem in quarta huius abundè refutauimus. Quare hæc Propositio tanquam per se nota habenda est. Quis enim negauerit duas Superficies esse æquales, quarum latera & quantitate & numero sunt æqualia? Vel ea demonstrabimus ratione quam illîc tradidimus.

THEOREMA 6, PROPOSITIO IX.

Datum Angulum bifariam diuidere.

Sit datus Angulus A B C, quem oportet in duo æqualia diuidere. Lineam A B

notabo puncto fortuito D: & ex linea B C reſecabo, per tertiam Propoſitionem, B E ipſi B D æqualem: & connectam D E. Tum ſuper D E conſtituam, per primam Propoſitionem, Triangulum æquilaterum D E F: & ducam B F lineam. Hanc dico eſſe quæ diuidit angulum B datum in duo æqualia: ſcilicet duos angulos qui ad B, eſſe æquales. Intelligo enim duo Triangula D B F & E B F. Et quoniam duo latera B D & B F, Trianguli B D F, ſunt æqualia duobus lateribus B E & B F, Trianguli B E F: illiusq; baſis D F, huius baſi E F, æqualis: erit, per antecedentem, angulus D B F, angulo E B F æqualis, Quod facere oportuit.

HANC DEMONSTRATIONIS formulam penè ad verbum adſcribunt omnes: ſed certè non ſatis firmam. Quid enim ſi aduerſarius contendat vnum ex lateribus Trianguli æquilateri ſuper D E conſtituti cadere in alteram linearum A B aut C D: vt in ſubiecta Figura Triangulum C D E ſit æquilaterum? Tunc non erit locus ducendæ lineæ B F, propterea quòd eſſet eadem cum B C. Occurrendum itaque fuit huic dubio per Quintam huius, poſitis D A & E C æqualibus, ductaq; A E linea. Illic enim probatum eſt, latera C D & C E æqualia eſſe non poſſe: quum ſint duo anguli C D E & C E D inæquales. Ac tum ſtabit Demonſtratio.

Sed & ex hac poſteriori conſtructione, pulchra oſtenditur ratio huiuſce Problematis demonſtrandi. Quum enim duæ lineæ A E & C D ſurſùm ductæ ad puncta oppoſita D & E ſeſe manifeſtò ſecent: ſi ducatur linea ab angulo dato B ad punctum interſectionis earum, vt linea B F: hæc diuidet angulum ipſum in duo æqualia.

Nam, per ea quæ ibidem demonſtrata ſunt, & ex quarta huius: ſunt ambo Triangula A D E & C E D inter ſe æquilatera & æquiangula: propterea quòd duo anguli A D E & C E D ſunt, per ſecundam partem quintæ, æquales: & duo latera A D & D E æqualia duobus C E & E D: ob idq; duo anguli C D E & A E D æquales. Vnde, per ſextam, duo latera D F & E F, Trianguli D E F, æqualia. Intellectis itaque duobus Triangulis B D F & B E F, procedet Demonſtratio vt in priori deſcriptione.

Sed & tota negotij huius ratio è Circulo depromitur: hoc eſt, ab æqualitate. Vtrum enim ſuper linea D E conſtituatur Triangulum Æquilaterum an Iſoſceles, nihil intereſt: modò ad concurſum duorum laterum æqualium ducatur linea: quæ hoc loco eſt linea B F.

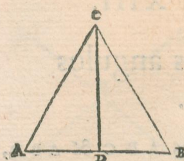
Punctum verò concurſus, hoc eſt, punctum F, in interſectione duorum Circulorum æqualium ſitum erit: quorum centra D & E: vt in poſtemo Schemate: in quo ductis lineis D F & E F, conſtabit Demonſtratio. Nam quum duo latera B D & D F, Trianguli B D F, ſint æqualia duobus B E & E F, Trianguli B E F, baſiſq; B F vtrique communis: erunt duo anguli qui ad B inter ſe æquales. Satis autem eſſe viſum eſt, ſi duorum Circulorum interſectionem appingeremus: ſicut & deinceps faciemus, compendij cauſa.

Hic etiam animaduertes, Trianguli Iſoſcelis vſum in Demonſtrationibus firmiorem eſſe quàm Æquilateri.

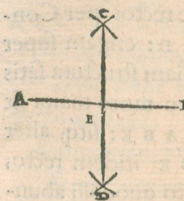
PROBLEMA 5, PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam in duo æqualia ſecare.

Sit data linea A B, ſecanda in duo æqualia. Super hanc conſtituo Triangulum Æquilaterum (vel Iſoſceles, in idem enim recidit) ſitque A B C. Cuius angulum C, per



per antecedentem, diuido in duo æqualia, ducta linea C D. Dico lineam A B bipartitò diuisam in puncto D. Intellectis enim duobus Triangulis A C D & B C D: erunt duo latera A C & C D, Trianguli A C D, æqualia duobus B C & C D, Trianguli B C D: & angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Quare, per quartam, erit basis A D æqualis basi D E, Quod erat faciendum.



HVIVS quoq; Problematis compendium è Circulo pendet. Positis enim centris in A & B punctis, liberisq; interuallis, sed æqualibus: quæ vtrinque ad oppositas intersectiones ducetur linea, secabit A B per æqualia: Qualis est hoc loco linea C D quæ in puncto E, lineam A B æqualiter diuidit. Intelliguntur enim duci A C & B C: vt fiant A E C & B E C Triangula inter se æquilatera.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato lineam ad perpendiculum erigere.

Sit data recta linea A B, & in ea datum punctum C: à quo linea perpendicularis excitanda sit. Pono C B æqualem A C, per tertiam: & super totam A B constituo, per primam, Triangulum A B D Æquilaterum (vel Isosceles, semper intelligo): Et à puncto C excito lineam C D. Hanc dico esse perperdicularem ad punctum C.



Quoniam enim duo Triangula A C D & B C D, ex ipsa constructione, sunt inter se æquilatera, & per octauam, æquiangula: erunt duo anguli qui ad C æquales, ac propterea recti, per decimam Definitionem. Quare, per eandem, linea C D perpendicularis, Quod erat faciendum.

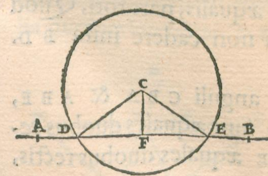
Hîc etiam satis agnoscitur Circuli vsus, eadem omninò descriptione obseruata quam in superiore exhibuimus. Illîc enim anguli qui ad E, fuerunt æquales: ac propterea recti.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO XII.

Ad datam rectam lineam interminatam, à puncto extra ipsam dato perpendicularem ducere.

Sit data linea interminata A B: punctum verò extra ipsam datum C: à quo ad ipsam A B sit ducenda perpendicularis.

Ponam centrum in puncto C, & describam Circulum, qui tantus sit, vt secet A B in duobus punctis, vt in D & E: Ductisq; lineis C D & C E, facio Triangulum C D E: Cuius angulum C diuidat in duo æqualia, per nonam, linea C F demissa in D E latus, secans ipsum in F puncto. Hanc dico esse perpendicularem super A B. Eritq; argumentatio eadem quæ in antecedente.



Quum enim duo latera C D & C F, Trianguli C D F, sint æqualia duobus lateribus C E & C F, Trianguli C E F, & angulus C vnius æqualis angulo C alterius: erit, per quartam, basis D F æqualis basi E F: & duo anguli qui ad F æquales, ob idq; recti, per decimam Definitionem. Quare linea C F perpendicularis super A B, Quod erat constitutum.

THEO

THEOREMA 6, PROPOSITIO XIII.

Quum recta linea ſuper rectam ſteterit: duos angulos aut rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea A B ſtet ſuper rectam C D. Dico duos angulos A B C & A B D, eſſe aut rectos, aut duobus rectis æquales.

Nam ſi ipſa A B perpendicularis fuerit, ſatis liquet angulos eſſe rectos, per Conuerſionem decimæ Definitionis. Sin autem inclinet in limitem D: erigam ſuper C D, per vndecimam, à puncto B perpendicularem B E. Ex qua iam ſtructura ſatis patet propoſitio. Nam quum angulus A B C tanto maior ſit angulo C B E recto, quantus eſt angulus A B E: ſitq; alter angulus A B D tanto minor angulo D B E itidem recto, quantus eſt idem ipſe angulus A B E: ablato quod illi abundat, vt addatur quod huic deeſt: fient duo anguli recti.

Scilicet, ſi ab angulo A B C obtuſo, auferatur angulus A B E: manebit C B E rectus. Tum ſi idem A B E addatur angulo D B A acuto: efficietur angulus D B E rectus. Quapropter hîc non opus eſt alia argumentationis forma. Eſt enim ex ijs quæ intellectum turbare potius quàm iuuare poſſit. Satis enim manifeſtum eſt duos angulos, nempè A B C obtuſum & A B D acutum, æquale, immò vnum & idem complecti ſpatium cum duobus angulis C B E & D B E rectis.

THEOREMA 7, PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectę lineæ coïerint, duosq; angulos cum ipſa aut rectos aut duobus rectis æquales fecerint: ambæ in continuum erunt & linea vna.

Sit linea recta A B: ad cuius punctum B duæ rectæ coëant, C B & D B: duoq; anguli C B A & D B A, aut ſint recti, aut duobus rectis æquales. Dico ambas C B & B D ſibi eſſe in directum: ſcilicet, C D eſſe lineam vnam.

Si enim non ſit linea vna, tunc C B continuata, verbi gratia, ad punctum E, tranſibit ſupra B D, aut infra. Tranſeat ergo ſuprà, ſi fieri poſſit: vt ſit C E linea vna. Quum itaque recta linea A B ſuper rectam C E cadat: erunt, per antecedentem, duo anguli A B C & A B E, duobus rectis æquales. Rurſus, quum duo anguli A B C & A B D ſint duobus rectis æquales, per hypotheſin: erunt, per primam Notionem, duo anguli A B C & A B E, æquales duobus angulis A B C & A B D. Communis auferatur A B C: relinquetur angulus A B E, per tertiam animi Notionem, angulo A B D æqualis, pars toti, Quod eſt abſurdum. Eadem ratione probabitur C B protracta non cadere infra B D. Erit igitur C D linea vna, Quod erat oſtendendum.

Sed & primo ſtatim intuitu ſic ratiocinabimur. Duo anguli C B A & A B E, ſunt pars duorum C B A & A B D. At C B A & A B D ſunt æquales duobus rectis, per hypotheſin. Quare non erunt duo C B A & A B E æquales duobus rectis, ne ſit pars toti æqualis.

THEOREMA 8, PROPOSITIO XV.

Si recta linea rectam lineam ſecuerit: angulos ſectionis oppoſitos æquales efficiet.

Sit recta

Sit recta linea A B, secans rectam C D in puncto E. Dico angulum A E C, æqualem esse angulo D E B: & angulum B E C, æqualem angulo A E D.

Quoniam enim duo anguli A E C & C E B, per decimamtertiam, duobus rectis sunt æquales: itemq; duo anguli C E B & D E B, duobus rectis æquales: erunt, per primam Notionem, duo anguli A E C & D E B, æquales duobus C E B & D E B. Ablato igitur cōmuni C E B, supererunt, per tertiā Notionē, duo anguli, A E C & D E B æquales. Similiter probabuntur duo anguli A E D & C E D æquales.

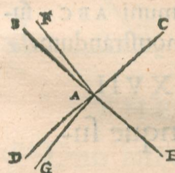
Ex hac consequitur illud,

Duæ lineæ rectæ se decussantes, quatuor angulos rectos faciunt, aut quatuor rectis æquales.

Conuersam huius decimæquintæ adscripsimus in hæc verba,

Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppositi æquales fuerint: binæ aduersæ lineæ in rectum sibi erunt & linea vna.

Sint quatuor lineæ A B, A C, A D & A E, exeuntes à puncto A, constituentes quatuor angulos ad ipsum A punctum: quorum angulus B A C sit æqualis angulo D A E: & angulus B A D, angulo C A E. Dico B E & C D esse duas tantùm lineas: hoc est, duas B A & A E esse sibi in continuum, & vnicam efficere lineam: duas itidem C A & A D, vnicam.



Sin aliter: ponatur, si fieri possit, E F linea vna: & C G itidem vna. Quum itaq; recta E A incidat in C G rectam: erunt duo anguli E A C & E A G, per decimamtertiam, duobus rectis æquales. Quumq; recta G A super rectam E F incidat: erunt, per eandem, duo anguli E A G & F A G, duobus rectis æquales. Communi igitur ablato E A G: erit per communem sentētiam, angulus E A C, æqualis angulo F A G. Sed & ipse E A C positus fuit æqualis angulo B A D. Erit ergo B A D ipsi F A G æqualis, pars toti, Quod esse non potest. Idem omninò proueniet absurdum, in quancunque partem protrahantur lineæ. Quare B E vna est linea, & C D vna, Quod fuit demonstrandum.

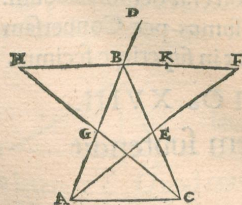
THEOREMA 9, PROPOSITIO XVI.

Omnis Trianguli vno latere producto, exterior angulus vtrolibet interiori opposito maior est.

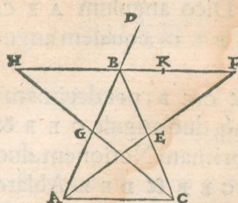
Sit Triangulum A B C, Cuius latus A B protrahatur ad punctum D. Dico angulum D B C, maiorem vtrolibet angulorum A C B & B A C.

Diuidam B C æqualiter, per decimam Propositionem, in puncto E: & connectam A E: quam protraham ad punctum F: & ponam E F æqualem ipsi A E, per tertiam: & connectam F B: vt duo sint Triangula A E C & F E B.

Primùm itaque ostendemus ipsum D B C angulum, maiorem esse angulo B C A interiori. Quoniam enim duo latera A E & E C, Trianguli A E C, sunt æqualia duobus lateribus E F & E B, Trianguli F E B: & angulus E vnius, per antecedentem, angulo E alterius æqualis: erit per quartam, angulus E B F æqualis angulo E C A. Sed angulus D B C maior est angulo E B F. Quare, per animi Notionem, erit & maior angulo E C A, Quod erat probandum.



Eadem ratione probabimus angulum C B D, maiorem esse angulo C A B: diuisa scilicet B A in duo æqualia, in puncto G, ductaq; C G & protracta ad punctum H, vt sint C G & H G æquales: ac demùm connexa H B, & protracta in K punctum. Intelligo enim duo Triangula A C G & G B H: Quorum



rum latera A G & C G, lateribus B G & H G sunt mutuò ęqualia: & angulus G vnius, per antecedentē, angulo G alterius æqualis: & per quartā, angulus G B H, angulo G A C: & per antecedentem & animi Notionē, angulus D B K eidem G A C æqualis. At D B C maior est quàm D B K: Quare & maior quàm G A C, Quod erat demonstrādum.

Linea H B protracta est ad K: quoniā adhuc non constat H B & B F esse in directum: quanuis res ipsa sic habeat. Sed est Mathematici, dubitationibus quibuscunque occurrere.

ALITER. Sit Triangulum A B C, cuius latus A B protrahatur ad punctum D. Dico angulum D B C maiorem esse vtrolibet angulorum B A C & A C B.

Quoniam enim duæ lineæ A C & B C coëunt in puncto C, & in ipsas incidit recta A B: erunt, per conuersum modum quintæ Petitionis, duo anguli interiores & ex eadem parte, scilicet A B C & C A B, duobus rectis minores. Sed anguli A B C & D B C, per decimamtertiam, duobus rectis sunt æquales. Duo igitur ipsi A B C & D B C maiores sunt duobus A B C & B A C. Quare dempto communi A B C, relinquetur angulus D B C maior angulo B A C. Eadem ratione, quum duæ lineæ B A & C A coëant in puncto A, & in eas recta incidat C B: erunt duo anguli interiores A B C & A C B duobus rectis minores. Sed A B C & D B C duobus rectis sunt æquales. Sunt igitur duo anguli A B C & D B C duobus A B C & A C B maiores. Quare ablato communi A B C, superit vt angulus D B C maior sit angulo A C B, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XVII.

Bini anguli cuiuslibet Trianguli, quomodocunque sumantur, duobus rectis sunt minores.

Poterat commodè hoc Theorema cum antecedente connecti. Illo enim cognito statim hoc notum euadit: sicut Euclides posteà facturus est in ea Propositione quæ est ordine Trigesima secunda. Vtriusque enim par est ratio & consecutio.

Sit Triangulum A B C. Dico binos ipsius, quomodocunque sumantur, angulos minores esse duobus rectis.

Protracto enim latere D B ad punctum D, quum angulus B exterior, sit per antecedentem, maior vtrolibet angulorum D & C: idem ipse B exterior cum B interiori, sit per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt, per communem Notionem, angulus A & angulus B interior, duobus rectis minores: similiterq; angulus C & idem B interior, duobus rectis minores, Quod erat demonstrandum.

Sic igitur instituetur argumentatio. Angulus A interior cum angulo B exteriori est æqualis duobus rectis, per decimamtertiam: sed angulus A (vt & angulus E) cum angulo B interiori, per antecedentem, minor est duobus angulis B interiori & exteriori. Est ergò angulus A (vt angulus C) cum angulo B interiori, minor duobus rectis, Quod erat demonstrādum.

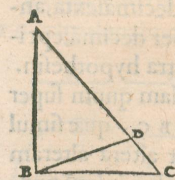
Sed & sine antecedentis adminiculo, argumentari possumus per Conuersam quintæ Petitionis, & per decimamtertiam Propositionem: sicut in superiore fecimus.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XVIII.

Maius latus cuiuslibet Trianguli, maiorem subtendit angulum.

Sit Triangulum A B C, cuius latus A C sit maius latere A B. Dico angulum A B C, maiorem esse angulo B C A.

Ex latere A C maiori abſcindam, per tertiam, A D æquale ipſi A B: & connectam B D.

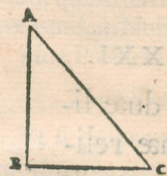


Intellectis igitur duobus Triangulis A B D & B C D, erunt duo anguli A B D & A D B, Trianguli A B D, per quintam, inter ſe æquales. Atqui angulus A D B maior eſt, per decimamſextam, angulo B C D interiori oppoſito: Ob idq; angulus A B D eodem angulo B C D maior. Quare & angulus A B C totus, multo maior ipſo B C D angulo, Quod erat oſtendendum.

Quòd ſi latus A B ponatur maius latere B C: iiſdem argumentis probabitur angulus C maior angulo A: reſecto A B ad æqualitatem B C. Ac in ſumma, binorum quoruncunque laterum comparatio iiſdem rationibus nitetur, reſciſſo ſemper maiore ad æqualitatem minoris.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIX.

Maior angulus cuiuslibet Trianguli, maiori etiam lateri opponitur.



Sit Triangulum A B C, cuius angulus B maior ſit angulo C. Dico latus A C maius eſſe latere A B.

Primùm enim æquale eſſe non poteſt latus A C lateri A B: Eſſet enim, per quintam, angulus B æqualis angulo C, contra hypotheſin. Minus etiam non erit: Minor enim eſſet angulus B angulo C, per antecedentem, contra hypotheſin. Hoc Theorema annecti poterat ſuperiori.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XX.

Duo latera cuiuslibet Trianguli reliquo ſunt maiora, quomodocunque ſumpta.

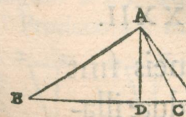
Sit Triangulum A B C. Dico duo latera A B & A C ſimul ſumpta, reliquo B C eſſe maiora.

Protraham B A ad punctum D, & ponam A D æqualem ipſi A C, per tertiam: & connectam C D. Et quoniam duo anguli A C D & A D C ſunt, per quintam, æquales: erit B C D maior ipſo A D C: quum ſit maior quàm A C D. Vnde, per antecedentem, latus B D maius erit latere B C. Atqui latus B D æquale eſt lateribus A B & A C. Sunt igitur latera A B & A C maiora latere B C, Quod fuit demonſtrandum.

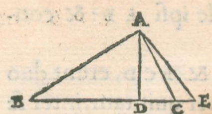
Eadem erit probandi ratio, ſi bina quæuis latera cum tertio comparentur.

EX RECTO etiam demonſtrabimus in hunc modum. Sit Triangulum A B C: cuius latus B C, lucidioris doctrinæ gratia, ponatur maximum trium laterum: vt quum probatum fuerit de maximo, nulla ſit de vtrouis reliquorum controuerſia. Dico duo latera A B & A C ſimul ſumpta, maiora eſſe latere B C.

A puncto A in rectam B C, per duodecimam, demitto perpendicularem A D: vt duo ſint Triangula A B D & A D C. Et quia vterque angulus qui ad D rectus eſt: erit, per decimamſeptimam, angulus A D B maior angulo B A D: &, per decimam nonam, latus A B maius latere B D, latusque A C maius latere D C. Sed B D & D C conſtituunt ipſum B C. Erunt igitur duo latera A B & A C maiora latere B C, Quod erat demonſtrandum.

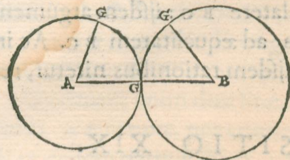


Quòd ſi linea perpendicularis ſit eadem cum latere A C, tum B C non erit maximum laterum, per decimamſeptimam & decimamnonam. Quapropter erit deducenda



cenda perpendicularis ad A B latus maximum. Si verò aduersarius contendat lineã perpendicularẽ cadere extra Triangulum, vt lineã A E: tum angulus A C B maior erit, per decimãsextã, angulo A E C recto, exterior interiori. Vnde A B, per decimãseptimam & decimamnonã, maius esset vtrolibet laterũ A C & B C, contra hypothesin.

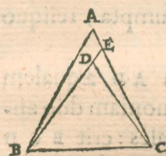
Hoc nobis Theorema ratio magnitudinum præscribit. Nam quum super duos terminos A & B lineæ A B statuerimus duas lineas A G & B G, quæ simul iunctæ tantùm sint æquales ipsi A B: si ambæ inclinari cœperint altera alteram versùs, stantibus fixis A & B punctis: duo ipsarũ puncta quæ ad G, non prius coïbunt quàm super A B iaceant, & vnum punctum G efficiãt. Quod ex Circulis secundùm ambarum linearum quãtitatem ductis, positisq; centris in A & B, est manifestum. Hi enim nusquam secant inter se, vt hîc adscriptum vides: Ob idq;, ex his tribus lineis nunquàm conflabitur Triangulum. Duæ enim A G & B G circunductæ nunquàm egredientur peripheriam. In hoc etiam extat præcipua quædam vis, &, vt sic dicam, autoritas Circuli: immò Naturæ quædam præstantia, quæ in Geometricis passim relucet.



THEOREMA 14, PROPOSITIO XXI.

Si à duobus terminis vnius laterum Trianguli duæ lineæ exeuntes, intra Triangulum coïerint: hæ reliquis duobus Trianguli lateribus minores erunt, & maiorem angulum continebunt.

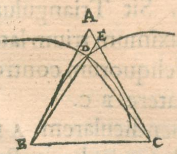
Sit Triangulum A B C: & à duobus terminis B & C lateris B C, exeant duæ lineæ B D & C D, coëuntes intra Triangulum in puncto D. Dico duas B D & C D minores esse duabus A B & A C: Et angulum B D C maiorem angulo B A C.



Producam B D donec secet A C in puncto E. Et quoniam duo latera AB & AE Trianguli ABE, sunt, per vigesimam, maiora tertio BE: Et per eandem, DE & EC maiora tertio DC: erunt quatuor AB, AE, DE, & EC, maiora tribus BD, DE, & DC. Commune auferatur DE: erunt tria AB, AE, & EC (ea sunt AB & AC) maiora duobus BD & DC, Quod est prius.

Altera pars sic probatur. Angulus B E C Trianguli B E C, maior est, per decimamsextam, angulo B A C: Et per eandem, angulus B D C maior ipso B D C. Maior ergo B D C ipso B A C, Quod erat demonstrandum.

Prior pars facile patebat, descriptis duobus Circulis secundùm spatium duarum B D & C D, positisq; centris in B & C. Omninò enim duo Circuli secabunt hinc inde duo latera A B & A C. Ac tum erit æqualitas inter duo segmenta duasq; B D & C D: Sicq;, per nonam Notionem, erunt A B & A C maiores ipsis D B & D C. Neque enim transibunt Circuli per punctum A, repugnante septima Propositione.



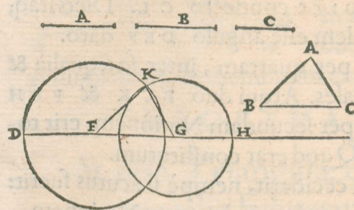
PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis quæ tribus datis rectis lineis sint æquales, Triãgulum perficere: Modò tamen duæ illarum quomodocunque sumptæ, reliqua sint maiores.

Sint tres lineæ datæ A, B, C, quarum duæ quomodocunque sumptæ, tertia sint maiores.

maiores. (Alioqui aptæ non essent ad Triangulum constituendum, per vigesimam). Volo ex tribus lineis. Quæ sint his tribus datis æquales, Triangulum conficere.

Ex linea quapiam interminata abscindo, per tertiam, D F æqualem lineæ A: & F G æqualem lineæ B: & G H æqualem lineæ C. Tum centro F, spatio verò F D, describo Circulum D K D: itemq; centro G, spatio verò G H, describo Circulum H K H. Hi duo Circuli se omninò secabūt inter se. Ducta enim linea à centro F ad peripheriā D K D, non haberet quò cōcurreret cum linea ducta à centro G ad peripheriam H K H: sicq; essent ambę simul sumptæ aut æquales ipsi F G, aut eadem minores, contra hypothesin. Sit itaque altera intersectionum in puncto K. Ad quam duco F K & G K. Dico tria latera Trianguli F G K tribus lineis datis esse æqualia.



Quum enim F G linea, quæ posita est æqualis lineæ B, sit vnum laterum ipsius Trianguli: & latus F G sit æquale lineæ F D, ex Centri definitione, quæ posita est æqualis lineæ A: erit & ipsum F G latus, per primam Notionem, ipsi A æquale. Demùm quum tertium latus G K, eadem lege Centri, sit æquale lineæ G H, quæ ipsa per eandem Notionem, æqualis est lineæ C: constat Propositio.

Hoc Problema in hanc sententiam poterat proponi.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum constituere.

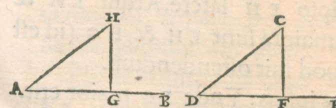
Vt si proponeretur Triangulum A B C, statuerem tres lineas in continuum ad æqualitatem trium laterum ipsius: Et procederet Demonstratio quam modò dedimus, adiumento octauæ & quartæ. Immò adeò poterat statim proponi à tertia Propositione, & solius Circuli officio absolui.

Quod autem de lineis proposuit Euclides, id nos docuit vt dignosceremus vtrum ex tribus datis lineis confici possit Triangulum an non: quod ex ipsis Circulis, si secuerint se inuicem, perspiciemus.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO XXII.

Proposita recta linea, ad datum in ea punctum dato angulo rectilineo angulum æqualem constituere.

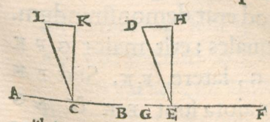
Sit data recta linea A B, datumq; in ea punctum A: datus verò angulus rectilineus C D E. Volo ad datum punctum A angulum rectilineum dato angulo C D E æqualem constituere.



In recta D E signetur punctum liberum F: & connexa C F, fiat Triangulum C D F. Iam ex tribus lineis quæ sint æquales tribus lateribus D F, D C, & C F, constituo Triangulum A G H. Quod quidem, ex ipsa constructione, manifestò æquale est Triangulo D C F: aut si autoritatem requiris, ex octaua. Ob idq; angulus A, angulo D ęqualis, Quod erat faciendū.

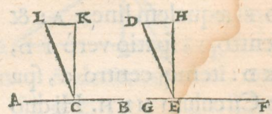
HOC ETIAM ex Recto perficiemus. Sit enim linea data A B, datumq; in ea punctum C: datus verò angulus D E F. Volo ad punctum C statuere angulum angulo D E F æqualem.

Produco F E in G punctum: Ac super punctum E erigo, per vndecimam, ad rectos angulos lineam E H: Quæ si congruat cum E D linea: erat datus angulus, rectus: Quapropter erecta perpendiculari super C punctū, habebimus quęsitum. Sin aliter, excitabo perpendicularem ad punctum H: cum qua coïbit, per quartam Petitionem, linea E D ducta. Est enim angulus D E H minor



C 2 recto;

recto: quum G E H sit rectus. Concurrant igitur in puncto D, vt fiat Triangulum D E H. Eodem modo erigo super punctum C datum, perpendicularem C K,



quæ sit æqualis perpendiculari E H: simulq; super punctum K, alteram perpendicularem K L, quæ sit æqualis perpendiculari H D: Et connecto C L. Dico itaq; angulum L C B æqualem esse angulo D E F dato.

Sunt enim duo H E D & K C L Triangula, per quartam, inter se æqualia & æquilatera: & duo anguli L C K & D E H æquales. Atqui duo B C K & F E H anguli sunt æquales, vterque enim rectus. Quare, per secundam Notionem, erit totus angulus L C B, toti angulo D E F æqualis, Quod erat constitutum.

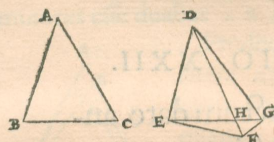
Quòd si perpendicularis extra angulum datum ceciderit, nempè si acutus fuerit: eadem erit probandi ratio, nisi quòd pro secunda, tertiam inducemus Notionem.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XXIIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, angulorum verò sub illis æquis lateribus contentorum alter fuerit altero maior: basis quoque maiorem respiciens angulum altera basi maior erit.

Sint duo Triangula A B C & D E F: sintq; duo latera A B & A C, duobus D E & D F mutuò æqualia: scilicet A B æquale D E: & A C æquale D F: sed sit angulus A maior angulo D. Aio basin B C maiorem esse basi E F.

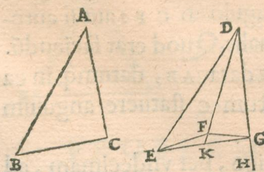
Ponam enim, secundùm doctrinam antecedentis, angulum E D G æqualem angulo A: Et, per secundam, D G lineam æqualem A C lineæ. Et connectam E G rectam: Quæ aut transibit supra E F, aut super eandem, aut infra. Et cadat primùm supra E F, vt secet ipsam D F in puncto H. Et manifestum est, ex quarta, Triangulum D E G æquale esse & æquilaterũ Triangulo A B C.



Quoniam itaq; Trianguli D F G duo latera D F & D G sunt æqualia: vtrunq; enim æquale A C: erunt, per quintam, duo anguli D F G & D G F super basin, æquales. Quapropter maior erit angulus D F G angulo F G E: ob idq; multò maior angulus totus E F G ipso F G E. Maius itaque, per decimamnonam, latus E G latere E F. Quare, quum E G sit æquale B C: maior est B C basis, ipsa E F basi, Quod fuit demonstrandum.

ITEM ALITER. Maior est angulus H F G, vt iam ostendimus, ipso F G H. Maius est igitur, per decimamnonam, G H latus ipso F H latere. Atqui E H & H F, per vigesimam, sunt maiora E F. Quare multò maiora sunt E H & H G (id est E G) ipso E F. Igitur & A C maius ipso E F, Quod fuit ostendendum.

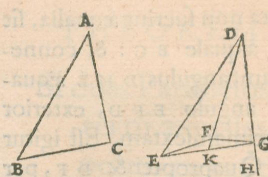
Si verò E G transeat super E F: tum E F erit pars ipsius: Vnde E G maior erit.



Transeat iam E G infra E F: duæq; D F & D G, quæ positæ sunt æquales, protrahantur ad H & K puncta, vt D F secet E G in puncto K. Eruntq;, per secundam partem quintæ, duo anguli sub basi F G H & G F K inter se æquales. Maior itaq; erit angulus G F K angulo E G F: ob idq; multò maior E F G ipso E G F. Quare maius est, per decimamnonã, latus E G (idem & B C) latere E F, Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quum duo anguli F G H & G F K sint æquales: erit maior G F K ipso F G K. Maius itaque per decimamnonam, latus K G, latere F K. Sed E K & F K, per vigesimam, sunt maiora E F. Quare multò maiora sunt E K & K G (id est E G) ipso E F, Quod erat ostendendum.

RVRS

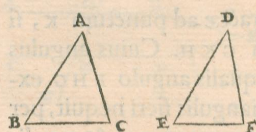
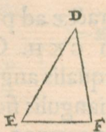


Rvrsvs ex vigesimaprima. Duo latera D G & E G sunt maiora duobus D F & E F. Quare quum D G posita sit æqualis D F: supererit F G maior E F. Sed vt hîc admonet Campanus, præstat prior demonstrandi ratio: vt ex vtraque parte quintæ Propositionis ducatur argumentatio. Iucunda tamen illa varietas ingenium acuit, & memoriam exercet.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XXV.

Si duo Triangula, duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, basis verò vnius basi alterius fuerit maior: angulus quoque maiori basi oppositus, maior erit angulo minori basi opposito.

Sint duo Triangula A B C & D E F: sintq; duo latera A B & A C, duobus lateribus D E & D F mutuò æqualia: sed basis B C maior basi E F. Dico angulum A maiorem angulo D. Hæc est Conuersa antecedẽtis.

Primùm itaq; æquales non erunt: Esset enim basis B C per quartam, basi B F æqualis, contra hypothesin. Neq; erit angulus A minor angulo D: Esset enim, per antecedentem, basis E F maior basi B C, contra hypothesin. Superest igitur vt A sit maior D, Quod fuit probandum.

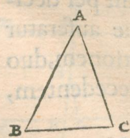
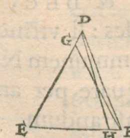
Manifestum quoque fuit hoc Theorema ex quarta, immò ex se ipso. Sed quia ex antecedentibus probationem recipit: cum cæteris in ordinem redactum est.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XXVI.

Si duo Triangula, duos angulos duobus angulis mutuò æquales habuerint, latusq; vnum vni lateri æquale, siue quod æquis adiacet angulis, siue quod vni æqualium angulorum subtenditur: reliqua quoque latera reliquis lateribus mutuò æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

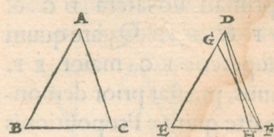
Sint duo Triangùla A B C & D E F, sitq; angulus B æqualis angulo E, & angulus C angulo F: Et sit aut latus B C æquale lateri E F: aut A B æquale D E: aut deniq; A C æquale D F. Aio reliqua duo latera, reliquis duobus esse lateribus æqualia: ac reliquum angulum A reliquo angulo D æqualem.

Primùm igitur sit latus B C, cui incumbunt duo anguli B & C, æquale lateri E F, cui incumbunt anguli E & F, positi æquales ipsis B & C. Dico latus A B æquale esse lateri D E: & latus A C, lateri D F: & angulum A, angulo D.

Nam si æquale non fuerit A B ipsi D E, sit D E maius: & rescindatur G E æquale ipsi A B: & connectatur F G. Eritq;, per quartam, angulus E F G æqualis angulo C: quapropter & angulo E F D, pars toti, quod est absurdum. Erit igitur D E æquale ipsi A B: ob idq;, per eandem, D F æquale A C: & angulus D, angulo A, sicut voluimus.

Sint rursus duo anguli B & C æquales duobus E & F: sitq; latus A B quod subtẽditur angulo C, æquale lateri D E quod subtẽditur angulo F, cui positus est ęqualis angulus C. Aio latus B C ęquale esse lateri E F: & latus A C, lateri D F: & angulũ A, angulo D.

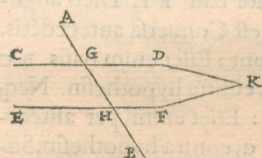


Si enim B C & E F latera non fuerint æqualia, sit E F maius: & ponatur E H æquale B C: & connectatur D H. Eritq;,per quartam, angulus D H E æqualis angulo A C B: ob idq; & angulo E F D, exterior interiori opposito, contra decimamsextam. Est igitur E F latus æquale B C lateri. Quapropter & D F, per quartam, æquale A C: & angulus E D F, angulo A. Sicq; patet propositio.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XXVII.

Si duas rectas lineas recta linea secuerit, duosq; interiores alternos angulos æquales fecerit: illæ duæ lineæ erunt paralleli.

Sit linea A B, secans duas lineas, C D quidem in puncto G, & E F in puncto H: sintq; duo anguli alterni D G H & E H G, æquales. Dico duas lineas C D & E F esse parallelos seu æquidistantes.



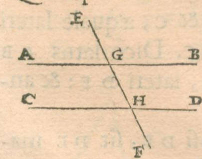
Sin minus, concurrant protractæ ad punctum K, si fieri possit: vt sit Triangulum G K H. Cuius angulus K G H interior, erit ex positu, æqualis angulo E H G exteriori opposito, Quod in Triangulis fieri nequit, per decimamsextam. Non igitur concurrunt C D & E F lineæ. Quare, per Definitionem Parallelorum, ipsæ æquidistant altera alteri, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXVIII.

Si duas rectas lineas recta secans linea, exteriorem angulum interiori opposito & ex eadem parte æqualem fecerit, aut duos interiores ex eadem parte duobus rectis æquales: duæ lineæ erunt paralleli.

Sint duæ lineæ A B & C D, quas secet linea E F, illam quidem in puncto G, hanc verò in puncto H: sitq; angulus G exterior angulo H interiori ex eadem parte æqualis: aut duo anguli H & G interiores ex eadem parte, duobus rectis æquales. Dico duas A B & C D lineas esse æquidistantes.

Quum enim E G B angulus, sit ex positu, æqualis D H G angulo: sitq;, per decimamquintam, A G H eidem E G B æqualis: erunt A G H & D H G alterni, æquales. Quare, per antecedentẽ, duæ A B & C D lineæ æquidistabũt inter se, Quod est prius.



Sint porrò duo anguli A G H & C H G duobus rectis æquales. Dico sic quoque duas A B & C D inter se æquistare.

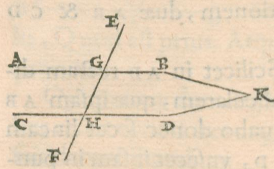
Quum enim duo anguli C H G & D H G, sint per decimamtertiam, duobus rectis æquales: si vtrinque auferatur C H G angulus: remanebunt, per communem Notionem, duo A G H & D H G alterni, æquales. Quare, per antecedentem, duæ A B & C D inter se æquidistabunt, Quod fuit demonstrandum.

HVIVS Theorematis pars posterior connexa est cũ Petitione vltima. Nam si duæ lineæ concurrere dicuntur, quæ cum linea ipsas secante duos angulos interiores ex eadem parte duobus rectis minores faciunt: conuerso modo, Quæ concurrunt, eæ duos angulos interiores ex eadem parte duobus rectis minores efficient. Atqui A B & C D lineæ, duos eiusmodi angulos duobus rectis minores non efficiunt, immò æquales: Non concurrunt igitur. Quare Paralleli sunt.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXIX.

Si duas Parallelos recta secet linea: erunt duo anguli alterni æquales: & angulus exterior interiori sibi opposito ex eadem parte æqualis: itemq́; duo anguli interiores ex alterutra parte constituti, æquales duobus rectis.

Sint duæ AB & CD paralleli, quas secet linea EF in punctis G & H. Dico duos angulos BGH & CHG alternos, æquales esse: Angulum item G exteriorem angulo H interiori, ipsi ex eadem parte opposito, æqualem: Angulos denique G & H ex eadem parte interiores simul sumptos, æquales esse duobus rectis. Hæc est Conuersa duarum antecedentium: Cuius primum caput sic probatur.



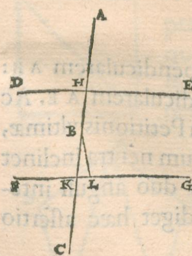
Si duo anguli BGH & CHG non sint æquales, sit maior ipse CHG. Et quoniam CHG & DHG sunt, per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt duo BGH & DHG duobus rectis minores. Vnde fiet vt duæ lineæ AB & CD in alterutram partem productæ concurrant, vt ad punctum K: Quod erit contra hypothesin, quum sint paralleli. Sunt igitur anguli BGH & CHG æquales.

Ad hoc consequitur secundum. Est enim, per decimamquintam, angulus AGE æqualis angulo BGH: vnde & ipsi CHG, per communem Notionem, æqualis, exterior interiori.

Hinc rursus colligitur tertium. Nam quum AGE & AGH, sint per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt quoq;, per animi Notionẽ, CHG & AGH æquales duobus rectis: ambo interiores & ex eadem parte, Quod erat demonstrandum.

Si duæ rectæ lineæ quæ duas parallelos secant, inter ipsas ad vnum punctum coïerint, duosq́ angulos alternos æquales fecerint: aut angulum exteriorem interiori sibi opposito ex eadem parte æqualem: aut denique duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

Sint duæ lineæ AB & CB, quæ duas parallelos DE & FG secent: AB quidem ipsam DE in puncto H: & CB ipsam FG in puncto K: Sitq́; angulus DHB æqualis angulo BKG: aut angulus AHD æqualis angulo BKF: aut deniq; BHD & BKF æquales sint duobus rectis. Dico duas AB & CB esse in continuum & lineam vnam.



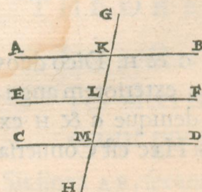
Si enim non sint eiusmodi: protrahatur AB, vt secet FG in puncto L, & sit AL linea vna: sitq́; Triangulum BLK. Et erit angulus DHB æqualis angulo GLB alterno, per primam partem huius vigesimænonæ: Quapropter GLB æqualis BKG interiori & opposito: Quod in Triangulis fieri non potest, per decimamsextam. Insuper erit per secundam partem huiusce, angulus AHD æqualis angulo BLK, ex eadem parte exterior interiori. Sed idem AHD ipsi BKF ponitur æqualis. Erit igitur BKF ipsi BLK æqualis: Quod per eandem decimamsextam fieri non potest.

Postremò, quum AHD & BKF ponantur duobus rectis æquales: sintq́; AHD & BLK duobus rectis æquales, per vltimam partem huius vigesimænonæ: erit BKF æqualis ipsi BLK, repugnante eadem decimasexta.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXX.

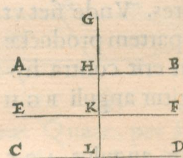
Quæ eidem ſunt æquidiſtantes, eæ quoque inter ſe ſunt æquidiſtantes.

Sint duæ A B & C D æquidiſtantes ipſi E F lineæ. Dico & ambas inter ſe æquidiſtare.



Ponam G H lineam, ſecantem tres lineas A B, E F & C D in punctis K, L, M. Et quoniam A B æquidiſtat E F: erunt anguli alterni B K L & E L K, per primum caput antecedentis, inter ſe æquales. Itidem, quia C D æquidiſtat E F: erit E L K, per ſecundum caput eiuſdem, æqualis C M L, exterior interiori. Angulus igitur B K L angulo C M L, per animi Notionem, æqualis. Qui quum ſint alterni, erunt per vigeſimamſeptimam Propoſitionem, duæ A B & C D æquidiſtantes, Quod erat demonſtrandum.

POTERAT euidentiſſimè demonſtrari ex Recto. Scilicet in A B rectam dimitto, per vndecimam, G H perpendicularem, quæ ipſam A B ſecet in puncto H: quam G H continuabo donec ſecet lineam E F in puncto K: & indè vſque ad C D, vt ſecet ipſam in puncto L.

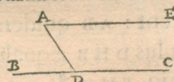


Iam quum G L ſit linea vna, comparatis viciſſim duobus A B & C D cum E F, adductaq; in probationem vigeſimaſeptima, ſeu vigeſimaoctaua: ſatis conſtat, per definitionem perpendicularis & per decimamquintam Propoſitionem, omnes angulos qui ad H, K, L, eſſe rectos: ac proptereà æquales. Quare per antecedentem, duæ A B & C D paralleli, Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA 10, PROPOSITIO XXXI.

Per punctum extra lineam rectam ſignatum, ipſi lineæ parallelum ducere.

Sit punctum A extra lineam B C ſignatum. Volo per A punctum, ipſi B C lineæ parallelum ducere.



Duco lineam A D, ſecantem B C in puncto fortuito D: quę cum ipſa faciat angulos A D B & A D C: Et conſtituo in puncto A, per vigeſimamtertiam, angulum D A E æqualem angulo A D B alterno. Ac tum erit A E ipſi B C parallelus, per priorem partem vigeſimæ octauæ, Quod erat faciendum.

HÆC ETIAM poterat Perpendicularis officio abſolui.

A puncto enim A duco, per vndecimam, ad rectam B C, perpendicularem A B: Et, per decimam, ad ipſam A D ſuper punctum A erigo perpendicularem A E. Ac tum manifeſtum eſt, per cōuerſam rationem Petitionis vltimæ, duas lineas A E & B C non concurrere: quum neutra inclinet in alteram: hoc eſt, quum ex neutra parte duo anguli interiores ſint duobus rectis minores. Neque maiori probatione indiget hæc aſſertio quàm ipſa Petitio.

Hæc ideò annotaui quòd lineæ Paralleli, ius Recti & Æqualis præcipuo quodam officio conſeruent. Quò fit vt Propoſitiones quæ Parallelorum mentionem hactenus fecerunt, vſum habeant in Geometricis Demonſtrationibus frequentiſſimum.

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.

Angulus exterior Trianguli, duobus interioribus ſibi oppoſitis eſt æqualis: Et cuiuslibet Trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales.

Sit Triangulum ABC: Cuius latus BC producatur ad punctum D. Dico angulum ACD exteriorem, duobus A & B interioribus ſimul ſumptis eſſe æqualem: Et tres angulos intimos ipſius Trianguli ſimul ſumptos, duobus rectis eſſe æquales.

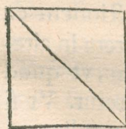
A puncto C ducam, per antecedentem, lineam CE parallelum lateri BA. Tum erunt anguli ECA & BAC, per primam partem vigeſimænonæ, æquales, vtpotè alterni: & per ſecundam partem eiuſdem, anguli ABC & ECD æquales, exterior interiori. Quare totus ACD exterior, ambobus A & B interioribus eſt æqualis, Quod eſt prius. Atque eadem erit probatio reliquorum angulorum extrà ſumptorum.

Quum itaq; duo anguli ACB & ACD ſint, per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt tres anguli ABC, BAC, & ACB, æquales duobus rectis, Quod fuit demonſtrandum.

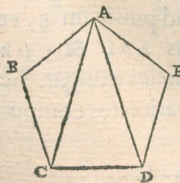
Appendix ex Campano.

Ex hac conſequitur, Cuiuſlibet Figuræ Multilateræ omnes angulos ſimul ſumptos bis tot rectis angulis eſſe æquales, quota eſt ipſa Figura in ordine Multilaterarum.

Verbi gratia, Trigonum eſt Figurarum prima, quum nulla ſit pauciorum laterum: duæ enim lineæ ſuperficiem non concludunt. Trigonum itaque duos complectitur angulos rectos. Vnitas enim quæ ordinem Trigoni notat, bis ſumpta facit binarium. Tetrapleuron, ſeu Quadrilaterum, quod in ordine eſt ſecundum, quatuor includit angulos rectos: Binarius enim duplicatus quaternarium efficit. Ordo autem Figurarum è lateribus colligitur. Nam ſi duo ſemper latera ſuſtuleris: numerus laterum reſiduus, ordinem Figuræ oſtendet. Vt ſi quæratur Hexagona quota ſit Figurarum: à ſenario aufer binarium, ac ſupererit quaternarius. Eſt itaque Hexagona ordine inter Figuras quarta. Quare octo angulos rectos continet. In ſumma, vt etiam addamus ad Campanum, quum Triangulum ſit Figura prima: vt ordinem cæterarum cognoſcamus, initium numerationis faciemus à ternario: vt quaternarius ſit pro binario, quinarius pro ternario: ſicq; ordinatim.



HÆC AVTEM rectorum angulorum conſideratio inde prompta eſt, quòd omnis multilatera Figura in tot Triangula reſoluitur, quota ipſa fuerit à prima. Quadrilatera enim in duo, Pentagona in tria, Hexagona in quatuor Triangula reſoluitur: ſicq; continenter: ſicut ex adſcriptis Figuris cernere eſt.



Verbi cauſa, In Pentagono ABCDE, quum quodlibet trium Triangulorum in quæ reſoluitur, duos rectos angulos includat: ipſum Pentagonum ſex rectos includet angulos. In idem etiam recidet ſi dicamus, In omni Figura multilatera omnes angulos ſimul ſumptos tot rectis æquari angulis, quot ſignificantur per numerum angulorum duplicatum, demptis quatuor.

A pun

A puncto enim fortuito intra Figurã signato, quale hîc in Hexagono A B C D E F, punctum G, si ducantur lineæ rectæ ad quenlibet angulorum: erunt in ipsa Figura tot Triangula comprehensa, quot anguli in ipsa fuerint. Horum itaque Triangulorum omnes anguli simul sumpti tot rectis angulis æquantur, per hanc Trigesimamsecundam, quot sunt anguli totius Figuræ duplicati: vt hîc sex Triangulorum, sunt anguli duodecim recti. Quumq; omnes anguli punctum G circunstantes, sint ex decimatertia, quatuor rectis æquales: si quatuor ex duodecim auferamus, supererunt in Hexagono sex anguli octo rectis æquales.

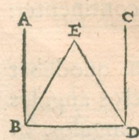
Hinc etiam manifestum est, Figuræ Polygonæ angulos exteriores omnes simul sumptos quatuor rectis æquales esse. Sunt enim interiores cum exterioribus bis tot rectis æquales, quot in Figura anguli fuerint, per decimamtertiam. Interiores autem bis tot rectis sunt æquales, quot ipsa Figura habuerit angulos, demptis quatuor, vt modò ostendimus: quapropter exteriores semper quatuor rectis æquales.

Exempli gratia, protrahantur quinque latera Pentagoni A B C D E, ad puncta F, G, H, K, L. Eruntq;, per decimamtertiam, duo anguli qui ad A, æquales duobus rectis: ac per eandem, duo anguli qui ad B, æquales duobus rectis. Sicq; binos quosq; angulos sumendo, ij omninò decem rectis æquabuntur. Demptis itaq; interioribus, qui sex rectis æquantur, vt modò probauimus: erunt exteriores quatuor rectis æquales.

Constat etiam, in omni Pentagono sic constructo vt quodlibet latus duo secet ex reliquis, quinque angulos duobus rectis esse æquales. Sit enim quale proponitur Pentagonum A B C D E, vt scilicet A C latus secet latus B E in puncto G: & latus A D secet idem B E in puncto F. Eritq;, per præsentem, angulus A F G æqualis duobus angulis B & D, Trianguli B D F: exterior interioribus oppositis. Eadem ratione angulus F G A, duobus angulis C & E, Trianguli C E G, erit æqualis. Atqui duo anguli A F G & F G A cum angulo A, per hanc ipsam, sunt æquales duobus rectis. Sunt igitur quatuor anguli B, C, D, E cum angulo A æquales duobus rectis, Quod erat demonstrandum.

Hæ Campani commentationes quanuis non indignæ cognitu videantur: tamen eius generis inuenta si conquirantur, in immensum excrescere possent. Figuræ enim Geometricæ tam latum spatiandi campum ingenijs quàm Numeri, immò adeò latiorem, exhibent.

Ex hoc etiam Theoremate intueri licet, Trianguli constructionem ex duabus lineis super tertiam ad rectos angulos erectis, perfici. Si enim altera in alteram inclinetur: ambæ cum tertia sic includent superficiem Triangulam, vt quod duobus rectis angulis deperit, id in tertio angulo recuperetur. Vt si intelligantur duæ lineæ A B & C D ad rectos angulos super lineam B D erectæ, moueri altera alteram versùs, & coïre ad punctum E, vt fiat Triangulum B D E: quod duobus rectis angulis A B D & C D B decrescit, id tertius angulus E sibi assumit, vt Superficies exurgat. Sic res humanæ comparatæ, vt aliæ in alias cadentes tot specierum varietates componant. Sed nos ad institutum reuertamur, aliâs de ijs lusuri.



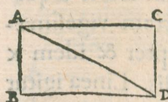
THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

Si duæ rectæ lineæ duas æquales & æquidistantes lineas

ex ad

ex aduerſo connectant: erunt & ipſæ inter ſe æquales & æquidiſtantes.

Sint duæ lineæ AB & CD, quæ duas AC & BD æquales & æquidiſtantes connectant ex aduerſo in quatuor punctis A, B, C, D. Dico duas AB & CD eſſe æquales inter ſe & æquidiſtantes.



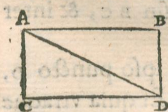
Connectam enim AD. Et quia AC & BD ſunt æquales & æquidiſtantes: erit angulus CAD, per primam partem vigeſimænonæ, angulo ADB æqualis. Itaque quum duo latera AC & AD, Trianguli ACD: ſint æqualia duobus lateribus BD & DA, Trianguli BAD: erit, per quartam, baſis AB æqualis baſi CD, Quod eſt prius.

Erunt & per eandem, duo anguli ADC & BAD inter ſe æquales. Quare quum ſint alterni, æquidiſtabit, per vigeſimamſeptimam, AB ipſi CD, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXXIIII.

In omni Parallelogrammo, latera ex aduerſo poſita, ſunt æqualia, & anguli oppoſiti æquales: Et Dimetiens medium Parallelogrammum diuidit.

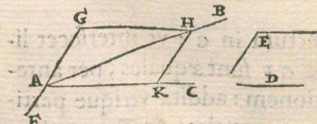
Sit Parallelogrammum ABCD, cuius Dimetiens AD. Dico duo latera AB & CD inter ſe eſſe æqualia: duoq; AC & CB inter ſe: Duos item angulos A & B inter ſe æquales, duoſq; B & C inter ſe. Totam denique Superficiem à Dimetiente AD, mediam diuidi.



Quum enim AB & CD ſint æquidiſtantes: duo alterni anguli BAD & CDA erunt, per vigeſimamnonã, æquales. Quumq; AC & BD itidem ſint æquidiſtantes: erunt & duo alterni CAD & BDA æquales, per eandem. Quum itaque duo Triangula ABD & ACD, habeant duos angulos duobus angulis mutuò æquales, ſcilicet BAD & BDA, ipſis CDA & CAD: & latus AD, cui incumbunt anguli, vtrique Triangulo commune: erit, per vigeſimamſextam, latus AB lateri CD æquale: latuſq; AC lateri BD: & angulus B angulo C æqualis: ob idq; totum Triangulum ABD, toti Triangulo ACD æquale. Quare Theorema omni ex parte conſtat.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri angulo dato æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis eſſe minores.

Sint duæ lineæ AB & AC, conſtituentes angulum datum BAC, ſed quæ ſint interminatæ ex parte extenſionis earum: ſitq; linea data, D: anguluſq; alter datus, E. Volo inter duas AB & AC collocare lineam æqualem lineæ D, quæ cum altera illarum faciat angulum æqualem angulo E dato. Modò tamen duo anguli A & E ſint minores duobus rectis. Alioqui fieri non poſſet Triangulum, per decimamſeptimam.



Placet ergo vt angulus conſtituendus ſit ſuper lineam AC. Super puncto A facio angulum CAF æqualem angulo E dato, per vigeſimamtertiã Propoſitionem: & ex altera parte produco FA ad punctum G, ſic vt AG ſit æqualis lineæ D datæ, per ſecundam: Et per punctum G duco, per trigeſimamprimam, GH parallelum ipſi AC: quam produco euſque vt concurrat, ſiue ſecet AB in puncto H: itidemq; per punctum H, duco HK parallelum ipſi GF, quæ ſecet lineã AC

in

in puncto K. Dico iam lineam HK constitutam inter duas AB & AC, esse æqualem lineæ D, & angulum K esse æqualem angulo E dato.

Quoniam enim ex constructione, AGHK est Parallelogrammum: erit KH æqualis AG, per trigesimamquartam Propositionem: quapropter & ipsi D lineæ æqualis, Quod est prius.

Et quoniam AK in duas parallelos FG & KH incidit: erit angulus AKH æqualis angulo FAK, per primam partem vigesimænonæ: quum sint alterni: quapropter & idem K angulus, ipsi E angulo dato æqualis. Linea igitur HK inter duas AB & AC collocata, & lineæ D æqualis, facit angulum K æqualem angulo E dato, Quod erat constitutum.

Hoc Problema hîc apponere visum est, aliquando mihi propositum ab artifice quodam Geometriæ non imperito: quod difficilem probationem videretur habere: Tria enim dantur vt Triangulum constituatur: duo anguli, & linea vna: præsertim quum vterque angulus datus, non sit super eadem linea constitutus: sic enim facilis esset constructio. Vt si super linea AK constituendum Triangulum proponeretur, habens duos angulos duobus angulis datis æquales. Hîc verò AK linea, arte conquiritur.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXXV.

Quæ super eandem basin Parallelogramma & inter easdem parallelos consistunt, inter se sunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma ABCD & EBCF, super eandem basin BC, & inter easdem parallelos AF & BC. Dico esse inuicem æqualia.

Aut enim linea BE secabit lineam AF citra punctum D, aut in ipso puncto D, aut vltrà. Secet igitur primùm citra D punctum. Et quia vtraque duarum linearum AD & EF, est æqualis lineæ BC: erunt & ambæ inter se æquales. Dempta igitur ED communi, remanebit AE æqualis DF. Rursus quia, per eandem, AB est æqualis CD: & angulus EAB, per secundam partem vigesimænonæ, æqualis angulo CDF interior exteriori: erunt, per quartam, duo Triangula EBA & FCD inter se æqualia. Quare addita vtrique Figuræ anormi CDEB, erunt duo Parallelogramma ABCD & EBCF æqualia.

Nunc autem secet linea BE lineam AF in ipso puncto D: eruntq; iisdem rationibus, duo Triangula ABD & DCF æqualia. Quare addito vtrique BCD Triangulo, fient duo Parallelogramma ABCD & DBCF æqualia. Sed & per trigesimamquartam probabitur sic. Duo Triangula ABD & BCD sunt æqualia, ratione Dimetientis, per trigesimamquartam: itemq; duo Triangula CDF & BDC æqualia, ob eandem rationem. Duo igitur Triangula ABD & CDF, sunt per communem Notionem, æqualia. Quare vtrique addito Triangulo BCD, fient duo Parallelogramma ABCD & DBCF æqualia.

Secet demùm linea BE lineam AF præter D punctum in G: vt intersecet lineam CD in puncto H. Quia igitur duæ lineæ AD & GF sunt æquales, per antecedentem & communem Notionem: addita vtrique particula DG, erunt duæ AG & EF æquales: & Triangulum ABG Triangulo DCF æquale: quia vtriusque latera sunt mutuò æqualia, & anguli mutuò æquales, per antecedentem, & per vigesimamnonam. Vtrique ergo addito BCH Triangulo, & ablato DGH ab iisdẽ: erũt duo ABCD & GBCF Parallelogrãma æqualia, Quod erat demonstrandum.

THEO

THEOREMA 26, PROPOSITIO XXXVI.

Quæ ſuper æquales baſes Parallelogramma, & inter eaſdem parallelos conſiſtunt, inter ſe ſunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma ABCD & EFGH, ſuper æquales baſes CD & GH, & inter duas parallelos AF & CH. Dico hæc duo Parallelogramma eſſe æqualia.

Ducam duas lineas CE & DF. Eritq́; per trigeſimamtertiam, ſuperficies CDEF æquidiſtantium laterum. Duæ enim æquidiſtantes CD & EF inter ſe ſunt æquales: quum vtraque ſit æqualis GH, & connectantur duabus CE & DF ex oppoſitis partibus. Quia ergò, per antecedentem, vtrunque duorum Parallelogrammorum ABCD & EFGH, eſt æquale Parallelogrammo CDEF (hinc EF baſi, illinc CD intellecta): ipſa erunt, per animi Notionem, æqualia, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ſuper eandem baſin & inter eaſdem parallelos, ſunt æqualia.

Sint duo Triangula ABC & DBC, ſuper eandem baſin BC, & inter duas parallelos AE & BF conſtituta. Hæc dico eſſe æqualia.

Duco, per trigeſimamprimam, CG æquidiſtantem AB: & CH æquidiſtantem BD. Eruntq́; duo Parallelogrãma ABCG & DBCH æqualia: ob id, & eorum dimidia. Quare quum ABC Triangulum ſit dimidium Parallelogrammi ABCG, per trigeſimamquartã: & DBC Triangulum ſit dimidium Parallelogrammi DBCH, per eandem: ipſa Triangula inter ſe erunt æqualia, Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 28, PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula ſuper æquales baſes & inter eaſdem parallelos conſtituta, ſunt æqualia.

Sint duo Triangula ABC & DEF, ſuper baſes BC & EF æquales & inter duas parallelos AG & BH. Hæc dico eſſe æqualia.

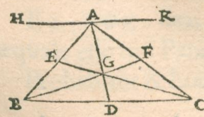
Ducam CK æquidiſtantem AB: & FL æquidiſtantem ED. Eruntq́; per trigeſimamſextam, duo Parallelogramma ABCK & DEFL æqualia: ob idq́; ABC & DEF Triangula, eorum dimidia, per trigeſimamquartam, æqualia, Quod erat oſtendendum.

Ex hac facillimè elicitur hoc Problema,

Datum Triangulum in duo Triangula æqualia partiri.

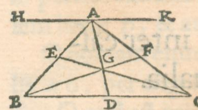
Sit enim Triangulum ABC, diuidendum in duo æqualia.

Diuido vnum laterum, & ſit ipſum BC, in duo æqualia, per decimam, in puncto D: & connecto DA. Dico duo Triangula ABD & ACD eſſe æqualia. Quod ſatis



manifeſtum eſt ex hac trigeſimaoctaua: ſi intellexerimus parallelum ipſi BC ductam per punctum A, vt docet trigeſimaprima: qualis hoc loco, ad euidentiam, poſita eſt HK. Duo etiam latera AB & AC æqualiter diuiſimus in punctis E & F: vt intelligas cuiuſcunque laterum ſectio fiat, totum Triangulum per æqualia diuidi. Vbi Triangulorum quoque minorum æqualitas agnoſcitur, ex tribus li-

neis A D, B F, & C E se scindentibus in puncto G. Hoc facit ad diuidenda Triangula in pariter paria: vt in 4, 8, 16, 32.



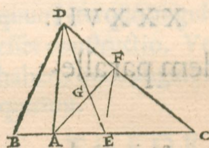
Mechanicè verò diuidetur Triangulũ in alias partes, diuiso similiter latere ductisq; lineis ab angulo opposito ad pũcta sectionũ. Cuius diuisionis ostensio ad Sextum librum reseruatur.

Subijciemus & hoc Problema,

A puncto in vno laterum Trianguli signato lineam ducere, quæ Triangulum bifariam diuidat.

Sit punctum A signatum in latere B C Trianguli B C D. Volo à puncto A ducere lineam quæ diuidat Triangulum B C D in duas partes æquales.

Diuido latus B C bipartitò in puncto E. Tum à puncto A duco ad angulum D oppositum, lineam A D. Cui per punctum E, duco E F parallelum, per trigesimam, quæ secet latus D C in puncto F. Et connecto A F. Dico A F esse quæ diuidit Triangulum B C D in duo æqualia: Scilicet A B D F Quadrilaterum, æquale esse A C F Triangulo.



Connecto E D, secantem A F in puncto G. Et constat ex trigesimaoctaua, duo Triangula B E D & C E D esse æqualia, intellecta parallelo ipsi B C, ducta per punctum D: quum sint super æquales bases E B & E C. Duo quoque Triangula D E F & A E F sunt æqualia, per trigesimamseptimam: quum sint super eandem basin E F, & inter duas parallelos A D & E F. Dempto itaque communi E F G, erit Triangulum A E G æquale Triangulo D F G: Vtrique igitur ipsorum addito Trapezio C F G E, erit A C F Triangulum æquale D E C Triangulo. Atqui D E C est dimidia pars totius Trianguli B C D: quapropter & A C F est dimidia pars eiusdem. Reliqua itaque pars dimidia, erit A B F D Trapezium. Quare linea A F diuidit totum A C D Triangulum æqualiter, Quod facere oportuit.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIX.

Triangula æqualia super eandem basin & ad eandem partem erecta, inter duas consistunt parallelos.

Triangula super eandem basin ad eandem partem erecta, dicuntur quum linea ducta à vertice vnius ad verticem alterius, latera eorum non secat.

Sint duo Triangula A B C & D B C super basin B C, quæ verticem ad eandem partem habeant, Et connectatur A D. Dico A D lineam esse parallelum basi B C.

Sin aliter: ducatur parallelus ipsi B C, per trigesimamprimam: quæ aut transibit supra A D, aut infra eandem. Si suprà, sit ipsa A E: & producatur B D, quousque concurrat cum A E in puncto E: connectaturq; E C. Quoniam itaque, per trigesimamseptimam, Triangulum A B C est æquale Triangulo E B C, vtrunq; enim inter duas parallelos: & eidem Triangulo A B C positum est æquale Triangulum D B C: erit & idem D B C æquale ipsi E B C, pars toti, Quod esse non potest.

Si verò parallelus duci possit infra A D, vt A F: connexa F C, fiet Triangulum F B C æquale ipsi D B C, pars toti. Non igitur erit alia parallelus basi B C, quàm ipsa A D, Quod erat ostendendum.

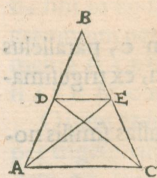
Appendix ex Campano.

Ex hac & antecedente consequitur,

Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia secuerit: ipsa erit tertio lateri æquidistans.

Sit

Sit enim Triangulum A B C : & ſit linea D E quæ diuidat duo latera A B & A C per duo æqualia in punctis D & E. Hanc dico eſſe parallelum ipſi A C.



In Quadrilatero A C E D ducantur duæ tranſuerſæ A E & C D. Intellectaq; per punctum E, parallelo ipſi A B : erit, per trigeſimamoctauam, Triangulum B D E æquale Triangulo D A E : quum duæ ipſorum baſes A D & D B, poſitæ ſint æquales. Rurſus intellecta per punctum D, parallelo ipſi B C : erit idem Triangulum B D E æquale Triangulo C E D. Erunt itaque, per animi Notionem, duo Triangula E A D & E C D æqualia. Quæ quum ſuper eandem ſint baſin D E, & in eandem partem erecta : erunt, per hanc trigeſimamnonam, inter duas parallelos D E & A C, Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 30, PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia ſuper æquales baſes, & in eandem partem erecta, inter duas conſiſtunt parallelos.

Sint duo Triangula A B C & D E F æqualia, ſuper duas baſes B C & E F æquales, & in eandem partem erecta: & connectatur A D. Dico duo Triangula A B C & D E F inter duas parallelos B F & A D conſiſtere. Hæc eſt Conuerſa trigeſimæoctauæ.

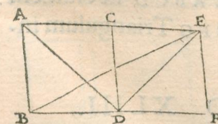
Nam ſi A D non eſt ipſi B F parallelus : alia parallelus ducta tranſibit ſupra aut infra A D. Si ſuprà, ſit ipſa A G : & producatur E D ad concurſum A G, in punctum G : connectaturq; G F. Eritq;, per trigeſimamoctauam, Triangulum G E F æquale Triangulo A B C. At D E F poſitum eſt ipſi A B C æquale. Erit igitur & D E F ipſi G E F æquale, pars toti, quod eſt abſurdum.

Si verò infra A D tranſeat, ſit ipſa A H : & connectatur H F. Ac tum eadem argumentatione probabitur Triangulum H E F, Triangulo D E F eſſe æquale, pars toti. Quare quum neutra ratione fieri poſſit : erunt B F & A D paralleli, Quod erat oſtendendum.

THEOREMA 31, PROPOSITIO XLI.

Si Parallelogrammum Triangulumq; ſuper eandem baſin, & inter duas parallelos conſiſtant : Parallelogrammum Triangulo duplum erit.

Sit Parallelogrammum A B C D, & Triangulum B D E, ſuper eandem baſin B D, & inter A E & B D parallelos. Dico Parallelogrammum A B C D eſſe duplum Trianguli B D E.

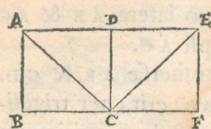


In Parallelogrammo ducam Dimetientem A D : Eritq;, per trigeſimamſeptimam, Triangulum A B D æquale Triangulo E B D. Sed Parallelogrammum A B C D, per trigeſimamquartam, duplum eſt Trianguli A B D : Quare & duplum Trianguli E B D, Quod erat oſtendendum.

EX HOC ſatis conſtat, Si duplicetur baſis, Triangulum ſuper hanc erectum, æquale eſſe ipſi Parallelogrammo, Quale hoc loco eſt B E F Triangulum.

Probabitur & hoc facilè quod ſubiecimus Theorema,

Si parallelogrammum Triangulumq; ſuper æquales baſes & inter duas parallelos conſiſtant : Parallelogrammum Triangulo duplum erit.



Sit enim Parallelogrammum A B C D, & Triangulum E C F, ſuper æquales baſes B C & C F. Dico A B C D Parallelogrammum eſſe duplum Triangulo E C F.

Connectatur E D: & ducatur per punctum C, parallelus ipſi E F, ſi C D parallelus non fuerit. Ac tum, ex trigeſimaſexta, & trigeſimaquarta, conſtabit Propoſitio.

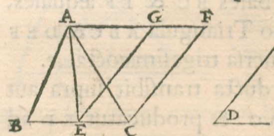
Hanc verò Euclides rectè prætermiſit ob facilitatem. Sed & nonnullas ſimilis notionis quas anteà expreſſit, poterat omittere.

PROBLEMA II, PROPOSITIO XLII.

Dato Triangulo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Triangulum A B C, datus verò angulus D. Volo ipſi Triangulo A B C æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum æqualem angulo D.

Diuido baſin B C in duo æqualia, per decimam Propoſitionem, in puncto E: & connecto A E. Tum per punctum A, duco A F parallelum ipſi B C, per trigeſimamprimam: & ſuper punctum E conſtituo, per vigeſimamtertiam, angulum G E C æqualem angulo D dato. Demùm ipſi E G, per punctum C, duco C F parallelum. Dico Parallelogrammũ E C F G eſſe æquale A B C Triangulo.



Quoniam enim, per trigeſimamoctauam, Triangulum A B E eſt æquale Triangulo A E C: erit totum Triangulum A B C duplum Trianguli A E C. At Parallelogrammum E C F G, per antecedentem, duplum eſt eiuſdem Trianguli A E C. Quare & ipſum E C F G Parallelogrammum, æquale eſt Triangulo A B C, habens angulum G E C æqualem angulo D, Quod erat faciendum.

Conuerſa quoque huius erit eiuſmodi,

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Parallelogrammum A B C D, datus verò angulus E. Volo ipſi A B C D Parallelogrammo conſtituere Triangulũ æquale, habens angulũ angulo E æqualem.

Super punctum C, per vigeſimamtertiam, conſtituo angulum D C F, æqualem angulo E: Et C F ſecet A B protractam, in puncto F. Itidem protraho C D, quæ eſt ipſi A F parallelus, ad punctum G: ita vt D G ſit æqualis ipſi C D. Ac demùm connecto F G. Dico Triangulum C F G eſſe æquale A B C D Parallelogrammo.

Quum enim, per trigeſimamoctauam, totum C F G Triangulum ſit duplum C D F Trianguli: & per quadrageſimamprimam, Parallelogrammum A B C D ſit eiuſdem C D F Trianguli duplum: erunt A B C D Parallelogrammum & C F G Triangulum inter ſe æqualia, Quod erat faciendum.

THEOREMA 32, PROPOSITIO XLIII.

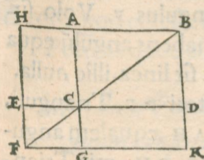
Duorum Parallelogrammorum circa Dimetientem maioris Parallelogrammi conſiſtentium, Supplementa ſunt æqualia.

Circa Dimetientem conſiſtunt Parallelogramma, quæ in Dimetiente maioris Parallelogrammi ſuam habent Dimetientem. Supplementa verò dicuntur quæ cum duobus

duobus Parallelogrammis maius Parallelogrammum perficiunt.

Sint itaque duo Parallelogramma ABCD & ECFG: quorum cuſpides quæ ad C, ſint in eodem puncto C ſic coniunctæ ad decuſſationem, vt vtrunque Parallelogrammum per medium diuidatur, Dimetiente BF: ſintq́; ipſis annexa duo Supplementa HAEC & CDGK, perficientia totum Parallelogrammum BHFK. Dico HAEC & CDGK Supplementa eſſe æqualia.

Quum enim Dimetiens BF bipartitò diuidat totum Parallelogrammum BHFK per trigeſimamquartam: erunt duo Triangula BFH & BFK æqualia. Quumq́; eadem BF bipartitò diuidat ABCD Parallelogrammum, erunt & duo Triangula BCA & BCD æqualia. Atque eadem ratione duo Triangula CFE & CFG æqualia, Quare ablatis duobus Triangulis BCA & CFE à toto Triangulo BFH: itemq́; ablatis duobus Triangulis BCD & CFG à toto BFK: remanebunt duæ Superficies HAEC & CDGK inter ſe æquales, Quod erat oſtendendum.



IN HAC Propoſitione demonſtranda, ſtructuram ab alijs aliquantùm variaui: non nouitatis ſtudio, ſed vt totum negotium Supplementorum & integri Parallelogrammi euidentiùs exponerem. Vix enim vſquam in toto opere Geometrico occurrit Figuratio magis fœcunda quam hæc Gnomica: hoc eſt, quæ vno Parallelogrammo & Gnoma conflatur. Vt hoc loco, ſi ABCD Parallelogrammum ſumamus, Figura illa HFCD, quæ cum ABCD perficit totum BHFK Parallelogrammum, Gnoma ſeu Gnomon vocatur. Si verò ſumatur EFCG Parallelogrammum: erit Gnomon HBCG Figura. Nam hìc Gnomonis explicandi locus eſt maximè opportunus: licet Euclides ad ſecundum librum diſtulerit.

Hanc ego Figuram myſticam ſoleo vocare: Ex ea enim, velut ex locupletiſſimo promptuario, innumerabiles exeunt Demonſtrationes. Quod cum magna voluptate perſpiciet qui in re Geometrica ſeriò ſe exercebit.

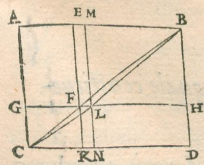
Cui verò magis placebit aliorum conſtructio, is primùm ſibi deliniet BHFK Parallelogrammum: tum ducat ED parallelum: inde AG alteram parallelum: atque eam demonſtrationem ſequatur quam modò tradidimus.

Huius Conuerſam ſic inſtituemus.

Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia & duo quantacunq; Complementa diuiſum fuerit: duorum Complementorum Dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi Dimetiens.

Complementa hìc vocauimus, duo Parallelogramma quæ cum duobus Supplementis totum Parallelogrammum conſtituunt. Sic enim ob vocum affinitatem non ineptè dici poſſunt: tum ne ſine nomine eſſent, tum vt faciliùs caperentur, à Supplementis nominatim diſtincta.

Sit itaque Parallelogrammum ABCD, Cuius duo Supplementa æqualia, AEFG & FHDK: duo verò Complementa GFCK & EBFH, quorum Dimetientes CF & FB. Dico CFB eſſe lineam vnam, & totius ABCD Parallelogrammi Dimetientem.



Si enim non ſit eiuſmodi, erit alia totius Parallelogrammi Dimetiens: Sitq́; ipſa CLB, infra Dimetientes CF & FB educta, ſecans GH in puncto L: Et per ipſum L punctum, ducatur MLN, per trigeſimamprimam Propoſitionem, ipſi AC Parallelus: Sintq́; in toto Parallelogrammo ABCD, duo Supplementa AMGL & LHND. Atque hęc, per Directam huius, erunt inter ſe æqualia: quum ſint circa Dimetientem CLB: Sed AEFG Supplementum poſitum eſt æquale Supplemento FHDK. Quum itaque FHDK maius ſit ipſo LHDN: erit AEFG maius ipſo AMGL,

pars toto, quod est absurdum. Iisdem rationibus probabitur Dimetiens educi non posse supra Dimetientes C F & F B. Quare C F B vna est Dimetiens totius Parallelogrammi, Quod erat probandum.

PROBLEMA 12, PROPOSITIO XLIIII.

Super data recta linea, dato Triangulo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea A B, datumq; Triangulum C D E, datus verò angulus F. Volo super A B constituere Parallelogrammum æquale Triangulo C D E, habens angulũ ęqualem angulo F. Differt hæc à quadragesimasecunda: quòd hîc data sit linea, illîc nulla.

Produco itaque B A ad punctum G: & pono A G æqualem lateri D E, Trianguli, dati: Et per vigesimamtertiam, ad punctum A facio angulum G A H æqualem angulo E: Et per secundam, facio A H æqualem lateri E C. Connexaq; G H, erit Triangulum A G H, per quartam Propositionem, æquale Triangulo C D E dato. Diuido postmodùm A G per æqualia in puncto K, per decimam: & connecto H K. Et per punctum H, duco H L Parallelum ipsi G B, per trigesimamprimam. Inde ad punctum A constituo angulum G A M æqualem angulo F dato, per vigesimamtertiam, vt A M secet H L in puncto M. Tum per punctum K, duco K N Parallelum & æqualem ipsi A M. Et connexa H N, facio Parallelogrammum A K M N. Quod, per trigesimamoctauam & quadragesimamprimam, erit æquale Triangulo A G H, ob idq; Triangulo C D E dato. Cæterùm duco B L Parallelum ipsi A M: quam coniungo cum N M protracta, in puncto L. A quo educo Dimetientem L A: quam produco donec iungatur cum N K protracta, in puncto P. Et duco P Q Parallelũ & ęqualem ipsi K B. Ac demùm connexis A R & B Q, perficio totum Parallelogrammum N L P Q, constans quatuor Parallelogrammis. Inter quæ Supplementum A Q, per antecedentem, æquale est Supplemento A N: ob id & Triangulo dato C D E. Quare quum linea data A B sit vnum laterum ipsius A Q Parallelogrammi: & angulus B A R sit, per decimamquintã, angulo G A L æqualis: ob idq; angulo F dato: constat totum Problema.

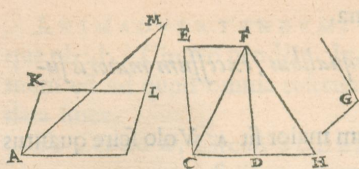
HANC Campani descriptionem apposuimus: vt ipsius tædiosam diligentiam, ac minimè necessariam ostenderemus. Nihil enim opus fuit Triangulo A G H. Tantùm fuit constituendum Parallelogrammum A K M N Triangulo C D E æquale, habens angulum æqualem angulo F, ex quadragesimasecunda: sicut rectè hîc Theon astruxit. Propositiones enim Geometricæ aliæ alijs præeunt: non vt ipsarum constructio, sed vsus tantùm repetatur: ne linearum multitudo intellectum conturbet potius quàm iuuet.

Huius autem Conuersa sic erit,

Super data recta linea, dato Parallelogrammo Triangulum æquale constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea A B, datumq; Parallelogrammum C D E F: datus verò angulus G. Volo super A B constituere Triangulum, ipsi C D E F Parallelogrammo æquale, habens angulum æqualem angulo G. Duco C H Dimetientem: & protracta C D ad H punctum, pono D H æqualem C D: Et connecto H F. Eritq; Triangulum C H F, per quadragesimamprimam, æquale Parallelogrammo C D E F: quum basis sit dupla.

Iam,



Iam, per directam huius, ſuper A B conſtituo Parallelogrammum A B K L, æquale Triangulo C H F, habens angulum A B L æqualem angulo G dato. Tum protracta B L, pono L M æqualem B L: Ac demùm connecto A M. Dico iam Triangulum A B M, ſuper A B eſſe conſtitutum quale voluimus.

Eſt enim Triangulum A B M æquale Parallelogrammo A B K L, per quadrageſimamprimam: quum ſint inter duas Parallelos B M & A K, ſitq; dupla baſis Trianguli. Sed A B L K, ex conſtructione, eſt æquale Triangulo C H F: & C H F æquale C D E F, per ipſam quadrageſimamprimam. Quare, per animi Notionem, Triangulum A B M æquale eſt Parallelogrammo C D E F, habens angulum A B M, æqualem angulo G dato, Quod erat faciendum.

Poterat quoque in hæc verba proponi Problema,

Inter duas Parallelos interminatas, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Vbi animaduertendum, inter duas parallelos datas Parallelogrammum conſtituere, non eſſe difficilius quàm ſuper data recta linea. Nam vbicunque datur linea recta, datur ipſius Parallelus interminata: intelligo, ad Parallelogrammum conſtituendum.

Hoc volui adijcere, vt Geometriæ candidati, Propoſitiones variè inuentas & enuntiatas conciliare, & ad vſum accommodare diſcant.

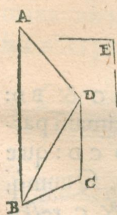
HANC NOSTRAM poteramus in locum ſequentis ſubſtituere, quum eſſet locupletior. Datur enim linea: præter id quòd ſequens ipſa vacare videtur, vt quæ ex antecedente ſatis patêret: niſi fortè quòd Rectilinea in Triangula reſoluere monet. Ob id, à nonnullis omiſſa eſt, vt à Campano. Eam tamen è loco non mouimus. Nihil enim in præſens de noſtro in ordinem redigere conſtituimus.

PROBLEMA 13, PROPOSITIO XLV.

Dato Rectilineo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Rectilineum A B C D, datus verò angulus E. Volo ipſi A B C D Rectilineo æquale Parallelogrammum conſtruere, habens angulum æqualem angulo E.

Reſoluo A B C D, quum ſit Quadrilaterum, in duo Triangula A B D & B C D: Ipſiq; A B D, per quadrageſimamſecundam, conſtituo æquale Parallelogrammum



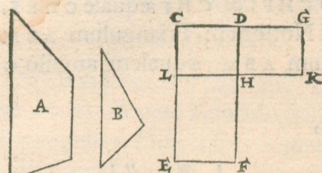
F G H K, habens angulum F K H, angulo E æqualem. Et continuata K H in punctum M, vt ſit angulus G H M, per vigeſimamnonam, æqualis angulo K: conſtituo ſuper G H, per antecedentem, Parallelogrammum G H L M, æquale Triangulo B C D, habens angulum G H M iam creatum. Et quoniam linea K M, ex poſitu, eſt linea vna: & angulus M H G æqualis angulo F G H alterno, per primam partem vigeſimænonæ: ſed ipſe M H G cum L G H duobus rectis æqualis, per vltimam partem eiuſdem: erit F G H angulus cum ipſo L G H, duobus rectis æqualis. Itaque, per decimamquartam, F L eſt linea vna. Quumq; F G & K H ſint, per trigeſimamtertiam, æquales: itemq; G L & H M, per eandem, æquales: erit tota F L, toti K M æqualis: & per trigeſimamtertiam, F K & L M æquales. Eſt igitur totum Quadrilaterum F K L M, Parallelogrammum. Quare quum angulus K ſit æqualis angulo E: conſtat Propoſitio.

Ex iam demonstratis emerget hoc Problema,

Propositis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minorem cognoscere.

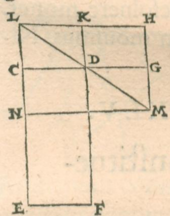
Sint duæ Superficies rectilineæ A & B, quarum maior sit A. Volo scire quantus sit excessus ipsius A supra B.

Constituo, per quadragesimamquartam, Parallelogrammum C D E F, æquale ipsi A Rectilineo, habens angulum C D E F, verbi gratia, rectum. Et protracta C D in G punctum, factaq; D G æquali ipsi C D: constituo, per quadragesimamquartam, super D G, Parallelogrammum D G H K, æquale ipsi B Rectilineo, habens angulum D G K rectum. Et protraho K H, donec secet C E in puncto L. Dico H L E F esse excessum Rectilinei A supra Rectilineum B.



Ac primùm C G K L vnum esse Parallelogrammum, clarius est quàm quod demonstrari debeat. Quoniam igitur C D & D G, ex positu, sunt æquales: & vtraque ipsi K L Parallelus: erunt, per trigesimamsextam, duo Parallelogramma C H & D K æqualia. Et quoniam D K positum est æquale ipsi B Rectilineo: erit & C H ipsi B Rectilineo, æquale. Quare, quum totum C F Parallelogrammum, sit æquale ipsi A Rectilineo sitq; L F excessus ipsius C F supra D K: erit, per communem Notionem, L F excessus A Rectilinei Supra B Rectilineum, Quod erat manifestandum.

ALITER facilius. Maneat C D E F Parallelogrammum æquale ipsi A Rectilineo. Et protracta C D ad G punctum, constituatur super D G, Parallelogrammum D G H K ipsi B Rectilineo æquale: productisq; E C & H K, vt concurrant ad L punctum, ducatur per D punctum, Dimetiens L D M, secans H G protractam, in puncto M. Et ducatur M N Parallelus ipsi H L, secans E L in puncto N: vt sit H L M N Parallelogrammum. Dico N F esse excessum Rectilinei A supra B Rectilineum.



Quum enim H D sit æquale B Rectilineo, sintq; H D & D N Supplementa, per quadragesimamtertiam, æqualia: erit quoque D N ipsi B Rectilineo æquale. Quo ablato à C F Parallelogrammo (quod positum fuit ipsi A æquale) remanebit N F excessus A supra B, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 14, PROPOSITIO XLVI.

Ex data recta linea Quadratum describere.

Sit data linea A B, ex qua sit describendum Quadratum.

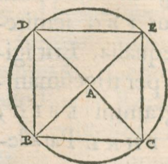
A punctis A & B, excito, per vndecimam, duas perpendiculares A C & B D: quarum vtranque, per tertiam, facio æqualem ipsi A B. Eruntq;, per vltimam partem vigesimæoctauæ, A C & B D Paralleli. Et connecto C D: quæ per trigesimamtertiam, erit æqualis & Parallelus ipsi A B. Quumq; duo anguli A & B sint recti: erunt & duo oppositi D & C recti, per vltimam partem vigesimænonæ: vel, si mauis, per trigesimamquartam. Quare, ex definitione Quadrati, erit A B C D Quadratum.

ALITER, Erigatur A C perpendicularis ad A B: eidemq; ponatur æqualis. Et à puncto C ducatur C D parallelus & æqualis eidem A B: & connectatur D B: Quæ, per trigesimamtertiã, erit æqualis & Parallelus ipsi A C. Quumq; per vltimam partem vigesimænonæ, omnes anguli sint recti: erit A B C D Quadratum, Quod faciendum fuit.

ANIM

Animadvertendvm, veram Quadrati constructionem è Centro, atque ob id, è Circulo pendêre. In ijs enim quæ perfecta sunt, punctum vbique primum est ad quod omnia referuntur. Sic igitur producemus Quadratum, non data linea.

Ex Centro A, Circuli B C D E, educātur duæ lineæ A B & A C ad peripheriam, facientes angulum qui ad A rectum: & earum vtraque protrahatur in puncta D & E peripheriæ. Ac tum connectantur B C, C D, D E, & E B. Quum igitur quatuor anguli qui ad A sint recti, per decimāquintam: & omnes lineæ æquales quæ illos comprehendunt, vtpotè à centro ad peripheriam: erunt, per quintam & trigesimamsecundam, in quatuor Triangulis integrum Parallelogrammum componentibus, bini quique anguli, qui ad B, C, D, E, semirecti: vnde quatuor integri recti: & per quartam, quatuor bases æquales. Quare B C D E Quadratum.

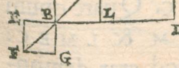


Atqve eam ob causam præcipuam, tam mystica semper habita est Decussatio: ea præsertim quæ ad rectos fit angulos, & vndique æqualitatem ostendit: qualis in Quadrato & Circulo conspicua est. Nam quòd Quadratum facimus ex ductu lineæ rectæ in seipsam, id sensus iudicio facimus, Artis ductu. Per centrum enim lineas duci, atque in ambitum, non in latum incedere par est. Punctum quippe illud fœcundissimum, lineas infinitas circunquaque procreat. Neque quisquam mihi obijciat, Quadratos Numeros: qui ex ductu lateris in seipsum producuntur. Diuersa est enim Discretorum, & Continuorum consideratio, quam hîc explicandi non est locus. Hoc tamen non nego, Artem nobis omni ratione amplectendam esse: quæ Naturam sibi soli cognitam, patefacit similitudine & imitatione. Hæc enim quæ facit, affabrè quidem facit: sed quò perfectius, eò occultius.

Animadverte etiam, Quadrato quatuor inesse Semidiametros, Hexagono sex, Octagono octo: Trigono tres, Pentagono quinque, Heptagono septem, Ennagono nouem: sicq; Figuris continenter, pro angulorum numero. De Perfectis semper intelligo: scilicet de æquilateris & æquiangulis. Atque in paribus, Diametri terminantur ab angulo per centrum, ad angulum oppositum: in imparibus autem, imperfecta quadam ratione, ab angulo per centrum, ad latus oppositum. In Circulo vtrunque inest. Diametri enim & ad latera & ad angulos educi intelliguntur: quum sit ipse, si hûc cogitatio pertingere potest, infinitorum angulorum, & infinitorum laterum. Quanto igitur plures in Figura fuerint Semidiametri, ea tanto propius ad Circulum accedit, tantoq; perfectior. Et tamen quanto pauciores habet, tanto maiorem vsum habere videtur. Trianguli enim vsus quàm Quadrati frequentior: Quadrati rursus quàm Pentagoni: Vt in his rerum humanarum imaginem cernamus. Minorum enim obsequio maiores vtuntur. Sed de his aliâs plurà.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, sua latera Quadrati lateribus æquidistantia habuerint, Quadrata esse oportet.

Sit Quadratum A B C D, cuius Diameter B C: sintq; duo Parallelogramma B E F G & B H K L sic posita, vt latus E B sit æquidistans lateri A C: & latus E F lateri C D: itidem latus H K eidē A C æquidistans, & K L ipsi A B: & Diameter C B protracta, diuidat hæc duo Parallelogramma per medium. Dico B E F G & B H K L esse Quadrata.



Quoniam enim angulus A est rectus, duoq; anguli A B C & A C B, per quintam, æquales: erit horum vterque, per trigesimamsecundam, semirectus. Quapropter & angulus E B F, per vigesimamnonam, semire

ſemirectus: quum C F cadat in duas Parallelos A C & E B: ob idq; per eandem, angulus B F G ſemirectus. Et quia latus E B, Trianguli E B F, per trigeſimamquartam, eſt æquale lateri F G Trianguli B F G: & B F vtrique commune: erit, per quartam, baſis E F æqualis baſi B G. Quumq; recta A G connectat duas parallelos A C & F G, & angulus A ſit rectus: erit & alternus G rectus, per vigeſimamnonam. Itaque, per trigeſimamſecundam, erit angulus F B G ſemirectus: & per ſextam, duo latera F G & B G æqualia. Erit igitur totus angulus E B G rectus: ac propterea, per trigeſimamquartam, totus F & totus E rectus: & quatuor latera Parallelogrammi E B F G, æqualia. Quare ipſum erit Quadratum. Eadem erit probatio de B H K L Parallelogrammo, Quod fuit conſtitutum.

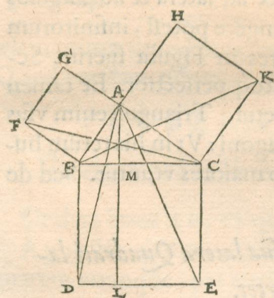
Huic Propoſitioni hunc locum aſſignauimus: quam tamen poteramus ſtatim poſt trigeſimamquartam ſubijcere: Sed ad Quadrati mentionem reponere placuit, non vltrà: quanuis Euclides ad quartam Secundi diſtulerit.

THEOREMA 33, PROPOSITIO XLVII, Campano 46.

In rectangulis Triangulis, Quadratum quod ex latere angulum rectum ſubtendente fit, Quadratis quæ ex duobus angulum rectum continentibus lateribus fiunt, eſt æquale.

Sit Triangulum A B C, cuius angulus A rectus. Dico Quadratum lateris B C, Quadratis duorum laterum A B & A C eſſe æquale.

Deſcribam ex B C latere, ſecundùm doctrinam antecedentis, Quadratum B C D E, ſimul ex A B & A C, duo Quadrata A B F G & A C K H. Eritq; B H, ex decimaquarta Propoſitione, linea vna, & C G itidem vna: quum omnes anguli qui ad A ſint recti. Tum ab angulo A recto demittam ad latus D E maximi Quadrati, lineam A L parallelum lateri B D, ſecantem B C in puncto M. Et ab eodem angulo A ducam duas A D & A E: itemq; à duobus reliquis angulis A B C & A C B, duas B K & C F.



Quoniam itaque ſuper baſin B F, & inter duas parallelos C G & B F, conſtituuntur A B F G Parallelogrammum & B F C Triangulum: erit A B F G, per quadrageſimamprimã, duplum ipſius B F C. At idem B F C, per quartam, æquale eſt A B D Triangulo: quum ſint B F & B C latera vnius, æqualia A B & B D lateribus alterius: & angulus B huius, æqualis angulo B illius: conſtat enim vterque ex angulo recto & angulo A B C communi. Eſt igitur Quadratum A B F G, duplum Trianguli A B D. Sed & Parallelogrammum B D L M duplum eſt, per quadrageſimamprimam, eiuſdem A B D Trianguli: ſunt enim ſuper eandem baſin B D, & inter duas parallelos B D & A L. Quare, per communem Notionem, Quadratum A B F G æquale eſt Parallelogrammo B D L M.

Atque eadem argumentatione, inductis duobus B C K & A E C Triangulis, probabimus Quadratum A C K H eſſe æquale Parallelogrammo L M E C. Quare quum Quadratum B C D E compleatur duobus Parallelogrammis B D L M & L M E C: ipſum erit æquale duobus Quadratis A B F G & A C K H, Quod erat demonſtrandum.

Hæc

HÆC EST illa tam celebris Demonſtratio à Pythagora Philoſopho perueſtigata: ob quam præ gaudio bouem Dæmonibus immolauit, ſi Heroni, Proclo, Lycio, & Vitruuio credimus. Quod tamen apud multos fidem non habet. Summa enim religione vir ille à cæde animantium abſtinuit. Vtut eſt, profectò mirabile inuentum eſt, & verè Dei cuiuſdam donum. In cuius ratiocinatione planè Philoſophica, libet paulùm expatiari: vt intueamur vnde hoc Theorema deſumptum ſit: quóque conſilio, ad huius inueſtigationem ſeſe docti homines exercuerint.

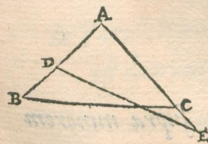
Imprimis totius meditationis occaſio à Recto & Æquali profecta eſt: Ex quibus omnes ferè Geometricas probationes originem ſumere diximus. Quod ex Triangulo Iſoſceli Rectangulo, quod dimidium eſt Quadrati, maniſeſtum faciemus.

Sit enim Iſoſceles Rectangulum ABC, cuius angulus A rectus. Dico Quadratum lateris BC, æquum eſſe Quadratis duorum laterum AB & AC. Deſcribo ex BC Quadratum BCDE: Cuius duco duas Diametros BE & CD, ſecantes inter ſe in puncto F. Quumq; duo latera BC & BD Trianguli BDC, ſint æqualia: erunt, per quintam, duo anguli BDC & BCD æquales: ob idq; ambo ſemirecti, per trigeſimamſecundam: quum ſit angulus CBD rectus. Eadem ratione erunt duo anguli CBE & CEB Trianguli BEC, ſemirecti: Quapropter duo latera BF & CF Trianguli BCF, per ſextam, æqualia. Rurſus quum duo anguli ABC & ACB Trianguli ABC, ſint ſemirecti, per quintam & trigeſimamſecundam: & baſis BC vtrique Triangulorum ABC & BCF communis: erunt duo latera AB & AC, æqualia duobus lateribus FB & FC, per vigeſimamſextam. Eſt igitur ABFC quatuor laterum æqualium, & quatuor angulorum rectorum: quapropter à Definitione, Quadratum. Iam verò quum duo anguli FCE & FEC Trianguli CEF, ſint æquales duobus angulis FBC & FCB ipſius Trianguli CBF, vtpote omnes ſemirecti: & baſis BC æqualis baſi EC: erunt duo Triangula BCF & FEC æqualia. Ex communi itaque Notione, erit totum Triangulum BEC, æquale Quadrato ABFC. Atqui Triangulum BEC, per trigeſimamquartam, dimidium eſt Quadrati BCDE. Et Quadratum igitur ABFC dimidium eſt eiuſdem BCDE. Si itaque bis ſumatur ABFC, ratione duorum laterum AB & AC: duo Quadrata æquabuntur Quadrato BCDE, Quod erat demonſtrandum.

HÆC Demonſtratio amplior quidem: Sed tamen tota Figuræ ſpecie facilis: adeò Rectum & Æquale ſeſe, vbicunque ſint, manifeſta oſtendunt.

At in Scalenis Rectangulis excogitanda fuit alia Demonſtrationis ratio. Nam deficiente laterum æqualitate, deficiunt quæ ab hac pendent, æqualitates Quadratorum & Triangulorũ. Erat quidem in promptu hæc ratiocinatio, Cuiuſlibet Trianguli Rectanguli, duo reliqui anguli à recto ſunt æquales duobus ſemirectis, per trigeſimamſecundam. Conuenit igitur vt Quadrata duorum laterum ipſos ſubtendentium, quãuis inæqualium, tantum efficiant, quantùm ſi eſſet vterq; ſemirectus: quum ſint baſes æquales. Quod enim vni laterum inæqualium decreſcit, alteri accreſcit: vt æqualitas potentię compenſetur (Potentia lineæ tanta eſt, quantum eſt ipſius Quadratum). Ac rationi conſentaneum eſt, vt potentia lateris rectum angulum ſubtendentis, æqualis ſit duabus laterum quæ duos ſemirectos ſubtendunt, potentijs. Magnitudo enim angulorum, magnitudinem laterum oppoſitorum metitur: & contrà.

Quod vt clariùs exponamus, In duobus Triangulis Rectangulis ABC & ADE, quorum ABC ſit Iſoſceles, ſed ADE Scalenum: notum eſt, ex vulgata illa trigeſimaſecunda, duos angulos ſemirectos ABC & ACB, Trianguli ABC, æquales eſſe duobus ADE & AED Trianguli AED, ſimul ſumptis. Sed non propterea notũ eſt, ſi Quadratũ baſis BC ſit æquale Quadratis duorũ laterũ AB & AC, continuò Quadratũ baſis DE æquale eſſe Quadratis duorum laterum AD & AE: etiamſi duæ baſes BC & ED ſint æquales. Id verò Pythagoras

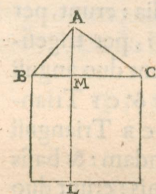


probauit

probauit generali Demonstratione. Quæ certè difficillima fuit inuentu, sicut in disquirendo experti sumus. Nam quum simili studio incenderemur, multa quidem in hanc rem meditati sumus: scopum tamē alia ratione attingere non potuimus quàm per proportiones: idq; ex Figura Gnomonica. Sed nos huius fontis vberrimi riuulos aliquot consectemur.

Repetita igitur prima constructione, iucundum est intueri quonam pacto Rectum & Æqualitas hîc suum ius tueantur. Nam tametsi A B & A C latera sint inæqualia, ob idq; anguli A B C & A C B inæquales: officio tamen perpendicularis A M, pulchra fit permutatio: vt intelligantur omnia in integro remanere. Angulus enim C A M, angulo A B C: angulusq; B A M angulo A C M perpetuò est æqualis, Quod sic demonstratur:

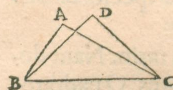
Angulus B A C Trianguli A B C, ponitur rectus: angulusq; A M C Trianguli A C M, rectus: & angulus C vtrique Triangulo communis. Itaque, per trigesimamsecundam & communem sententiam, reliquus C A M angulus, reliquo A B C est æqualis. Rursus quum vterque angulus qui ad M sit rectus, & angulus B probatus sit æqualis angulo C A M: consequitur vt reliquus B A M, reliquo A C M sit æqualis, Quod erat demonstrandum.



Vides vt perpendicularis æqualitatem testetur non laterum singulorum, sed potentiæ ipsorum. Hoc est, si Quadratum lineæ B C ad duo Quadrata æqualia reducatur: hæc erunt æqualia Quadratis duorum laterum A B & A C. Vbi etiam animaduertendum, eæ lineæ vt præstent mutuas operas, officij permutatione. Nam ex subtensa B C fiunt duo latera Triangulorum aduentitiorum A B M & A C M: Et ex duobus lateribus primi Trianguli A B C, rectum angulum continentibus, fiunt duæ subtensæ. Sed quonam modo fiat ea reductio Quadratorum ad æqualitatem, placet hîc demonstrare.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Sint Quadrata duarum linearum A B & A C, inæqualia. Volo hæc duo reducere ad duo Quadrata æqualia. Ambas lineas constituo ad angulum rectum B A C: & connecto B C. Tum super duobus terminis B & C facio duos angulos semirectos (id verò fiet erectis perpendicularibus, ac diuiso vtroque angulorum rectorum per æqualia: vt docet nona huius): sintq; anguli B C D & C B D semirecti: & concurrant duæ lineæ B D & C D ad punctum D. Dico duo Quadrata laterum B D & C D, esse æqualia duobus Quadratis laterum A B & A C.



Sunt enim, per sextam, duo latera D B & D C æqualia: & angulus D, per trigesimamsecundam, rectus: Quapropter Quadratum lateris B C, æquale est Quadratis duorum laterum D B & D C, per hanc quadragesimamseptimam. Sed & æquale Quadratis duorum A B & A C, per eandem. Quare, per animi Notionem, Quadrata duorum D B & D C sunt æqualia duorum A B & A C Quadratis, Quod erat faciendum.

Ex hoc habetur & hoc Theorema,

Si duo Triangula rectangula æquales subtensas habuerint: Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, sunt æqualia Quadratis duorum reliquorum alterius.

Quod satis patet ex postrema constructione.

Sed & indidem hoc exibit Problema,

Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.

Potent

Potentiam lineæ tantam eſſe diximus, quantum eſt ipſius Quadratum.

Sint itaque duæ lineæ inæquales AB & BC, quarum maior AB. Volo ſcire quantùm poſſit AB ſupra BC. Hoc eſt, volo reperire Quadratum, quod cum Quadrato ipſius BC, ſit æquale Quadrato lineæ.



Statuo AB & BC in continuum: poſitoq; Centro in puncto continuationis B, deſcribo Semicirculum ADE ſecundùm Quantitatem maioris AB. Tum ſuper C puncto, erigo perpendicularem: quam produco donec attingat peripheriam in puncto D: Et connecto BD. Dico Quadratum lineæ CD eſſe exceſſum potentiæ lineæ AB ſupra BC.

Quoniam enim angulus C Trianguli BCD, eſt rectus: Quadratum ſubtenſæ BD, æquale eſt Quadratis duorum laterum BC & CD: igitur & iiſdem eſt æquale Quadratum lineæ AB. Quare Quadratum lineæ BC tanto minus eſt Quadrato lineæ AB, quantum eſt Quadratum lineæ CD, Quod erat inueſtigandum.

Hanc Theon ſubnectit decimætertiæ Decimi: eamq; probat ex prima Quarti & trigeſima Tertij: quam tamen ex hac ſola Pythagorica demonſtrari vides.

Ex hoc etiam habetur ratio inueniendi tertij lateris Trianguli Rectanguli, duobus quibuſuis cognitis. Quod clarius eſt, quàm quod probandum ſit.

NVNC autem hoc Theorema quonam pacto ad Numeros accommodetur, obiter oſtendemus. In Numeris itaque locum præcipuè habet, quum maximus ad medium fuerit vt 5 ad 4: ſcilicet in proportione, quam vocant, ſeſquiquarta: & medius ad minimum vt 4 ad 3: hoc eſt, in proportione ſeſquitertia. Eiuſmodi ſunt tres 3, 4, 5: treſq; 6, 8, 10: & 12, 16, 20: ſicq; continuo progreſſu. Quadratum enim 20 eſt 400, ac tantundem efficiunt 144 cum 256, quæ ſunt Quadrata ex 12 & 16.

Sed & cognito minimo laterum in Numeris, Scalenum Rectangulum ſic abſolues. Dimidium cogniti duc in ſe: à producto aufert vnitatem: habebis alterum latus. Huic adde binarium: fiet maximum latus, ſeu ſubtenſa. Vt, ſit minimum latus 10: Horum dimidium duc in ſe: fiunt 25: à quibus ablata vnitate, ſuperſunt 24, medium latus: his adde binarium: fiunt 26, ſubtenſa. Horum enim Quadratum 676: Et tantundem efficiunt 100 & 576, Quadrata ex 10 & 24.

Iſoſcelia verò Rectangula ex Numeris non conficiuntur. In quo id dignum conſideratione eſt, quod in Geometricis eſt euidentius & Demonſtrationi promptius, id in Numeris veritatem non habere. Nunquam enim duo Quadrati Numeri æquales Quadratum Numerum componunt. Atque eam ob cauſam, lateris Quadrati ad Diametrum proportio incognita. Eſt enim Diameter radix ſeu latus duorum Quadratorum æqualium in vnum Quadratum iunctorum: ob id, irrationale: hoc eſt, vt in Arithmeticis dicitur, radix Surda. Vt radix 2, 8, 32: ſicq; continenter, alternis Numeris Progreſſionum intermiſſis.

Illud quoque non omittam, hoc Theorema Pythagoricum non ex Triangulo, ſed ex Parallelogrammo Rectangulo eſſe depromptum. Quod & Numerorum affinitas oſtendit. Nullum enim Numeris cum Triangulis commercium: neque Superficies, per Numeros abſoluitur, niſi multiplicatione. Multiplicatio verò, minimùm, quadrilatera eſt. In Geometricis etiam Superficiebus, Triangula vt dimidia Parallelogrammorum conſiderari debent. Sic itaque proponi poterat Theorema.

In Parallelogrammis Rectangulis, Quadratum quod à Dimetiente fit, æquale eſt duorum quæ ſubtendit laterum, Quadratis.

Quia tamen ſimpliciora ſunt Triangula, atque ob id tractabiliora: eorum nobis officium acceſſimus. Sed de his aliâs.

Ex hoc etiam ſatis euidens eſt illud,

Data Diametro, componere Quadratum cuius eſt Diameter.

Conſtitutis enim ſuper duobus terminis lineæ, duobus angulis ſemirectis, & perfecto Triangulo: habebitur dimidium Quadrati: Cuius altera pars facilè conficietur. Inde manifeſtum eſt & illud,

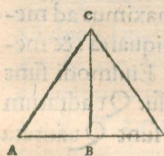
Quadratum Diametri, duplum eſt Quadrati cuius ipſa eſt Diameter.

Quod nulla indiget probatione.

THEOREMA 34, PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab vno laterum Trianguli fit Quadratum, æquale fuerit duorum reliquorum Quadratis: angulus ab illo latere ſubtenſus, rectus erit.

Sit Triangulum A B C: ſitq; Quadratum lateris A C æquale Quadratis duorum laterum A B & B C. Dico angulum B oppoſitum A C lateri, eſſe rectum. Conuerſa antecedentis.



A puncto B ad contrariam partem ipſi A puncto, educo perpendicularem B D, per vndecimam: quam pono æqualem A B, per ſecundam: Et connecto D C.

Et quoniam angulus C B D rectus eſt: Quadratum lateris C D, per antecedentem, æquale eſt Quadratis duorum laterum B C & B D: quapropter & Quadratis duorum B C & B A. Eſt igitur ipſum C D latus ipſi A C lateri æquale, per animi Notionem: quum vtriuſque Quadrata ſint æqualia. Triangulum itaque A B C, æquale eſt & æquilaterum Triangulo C B D. Quare angulus A B C, per octauam, angulo C B D æqualis: ob idq; rectus, Quod erat demonſtrandum.

PROBABIMVS & ab impoſſibili, Conuerſarum more.

Si enim Quadratum lateris A C eſt æquale Quadratis duorum A B & B C, neque angulus B ſit rectus: erit maior aut minor recto. Ac priùs ſit maior recto, fiatq; angulus D B C rectus, educta perpendiculari B D, per vndecimam: quæ ponatur æqualis lateri A B, per ſecundam: Et connectatur C D. Eritq;, per directam huius, Quadratũ ipſius C D æquale Quadratis duorum B D & B C: quapropter & Quadratis duorũ B A & B C. Erit igitur baſis C D æqualis baſi C A: quum ipſarum Quadrata ſint æqualia: Quod eſt contra vigeſimamquartam Propoſitionem. Nam quum ſit angulus A B C maior angulo D B C, ſintq; duo latera A B & B C duobus lateribus D B & B C mutuò æqualia: erit baſis C A maior baſi C D. Eadem ratione probauimus angulum totum B, non eſſe recto minorem. Eſt igitur rectus, Quod erat demonſtrandum.

Sed probationes quæ affirmatè concludunt, digniores ſunt ijs quæ ab impoſſibili.

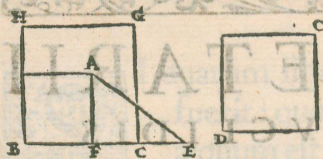
Ex Campano.

Propoſitis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adiungere.

Licet intempeſtiuè Campanus Gnomonis conſtructionem hîc appoſuiſſet, quum Euclides Gnomonem poſteriùs definiat: eius tamen Propoſitionem loco non mutauimus: præſertim quum Gnomonem iam anteà in Quadrageſimatertia definierimus.

Sint itaque duo Quadrata A B & C D: quorum alteri, vt ipſi A B, ſit adiungendus Gnomon æqualis reliquo C D.

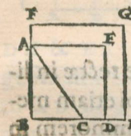
Protrahatur latus B F Quadrati A B in continuum: & ponatur F E æqualis lateri ipsius C D: Et connectatur E A. Eritq; Quadratum ipsius E A, æquale duobus Quadratis E F & F A Trianguli E F A, per Quadragesimamseptimam. Sed Quadratum ipsius E F, est æquale ipsi C D Quadrato. Et Quadratum lateris F A, est ipsum A B Quadratum. Est igitur Quadratum ipsius A E æquale duobus C D & A B Quadratis. At verò E F & F A latera sunt, per vigesimam primi, longiora latere A E. Sed F A est æquale F B. Erunt ergo E F & F B, ipso A E longiora. Quapropter tota B E longior est quàm A E. Secetur igitur ad ipsius æqualitatem in puncto C: fiatq; B C æqualis ipsi A E: Et describatur Quadratum B C G H ex ipsa B C: quod erit æquale Quadrato ipsius A E. Sed Quadratum A E duobus Quadratis A B & B C est æquale. Et Quadratum igitur B C G H æquale est eisdem. Quare, quum Quadratum ipsius B C componatur ex Quadrato A B & Gnomone F G A H: erit Gnomon ipsi C D Quadrato æqualis, Quod fuit faciendum.



SED multò expeditiùs sic poterat confici.

Sint duo Quadrata, quorum latera sint A B & B C. Volo Quadrato lineæ A B adiungere Gnomonem æqualem Quadrato lineæ B C.

Constituo ambas ad angulum rectum A B C. Et connecto A C. Descriptoq; Quadrato lateris A B, quod sit A B D E, protraho B A ad punctum F: vt sit B F æqualis A C. Et describo Quadratum B F G H: quod erit æquale Quadrato ipsius A C, quum lineæ sint æquales: ac propterea æquale Quadratis duorum A B & B C. Quum itaque B F G H Quadratum, compleatur ipso Quadrato A B D E & Gnomonem F E G D: erit ipse Gnomon æqualis Quadrato lineæ B C, Quod erat faciendum.



Libri Primi Geometricorum Elementorum

FINIS.





IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER SECVNDVS.

Parallelogrammum Rectangulum.



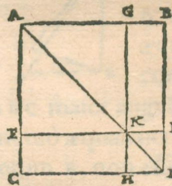
OMne Parallelogrammum Rectangulum, sub duabus rectum angulum constituentibus rectis lineis dicitur contineri.

Parallelogrammum Rectangulum fit ex ductu lineæ rectæ in lineam rectam, idq; instar Numerorum: facilitatis, vt diximus, gratia. Vbi etiam meminisse oportet. Ducere maiorem lineam in minorem, idem esse ac si minorem in maiorem ducamus: sicut 3 in 4, & 4 in 3, idem efficiunt.

Gnomon.

In Parallelogrammis, alterutrum Parallelogrammorum quæ circa Dimetientem consistunt cum duobus Supplementis, Gnomon vocatur.

Hoc iam antè in quadragesimatertia Primi explicauimus. Si enim in Figura adscripta, Parallelogrammum H F cum duobus Supplementis C K & K B sumamus, efficietur Gnomon E D G: seu, vt alij designant, C D G K: quod vnum & idem est. Quòd si Parallelogrammum E G cum iisdem Supplementis sumpserimus, fiet Gnomon F A C K. Deest itaque Gnomoni alterutrum interiorum Parallelogrammorum quæ Dimetiens media secat: quæq; Complementa in quadragesimatertia Primi nominauimus.



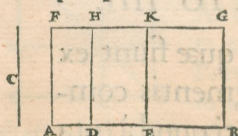
THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.



SI duarum linearum altera in partes aliquot secta fuerit: quod ex ductu alterius in alteram fit, æquum est iis quæ ab insecta & quolibet segmento Rectangulis, producuntur.

Sint duæ lineæ A B & C: quarum A B secta sit in partes A D, D E & E B. Dico id quod fit ex ductu C in A B, æquale esse Rectangulis quæ fiunt ex ductu eiusdem C in A D, D E, & E B segmenta.

Super puncta A & B, erigam lineas perpendiculares A F & B G, per vndecimam Primi: & ponam vtranq; æqualem ipsi C: Et connexa F G, complebo Parallelogrammum Rectangulum A B F G. Quod quidem ex linea A F (ea est linea C) in A B producitur. Tum à punctis sectionum D & E ducam, per trigesimamprimiam Primi, ipsis A F & B G, parallelos D H & E K: quarum vtraque est æqualis C, quum vtraque sit æqualis A F, per trigesimamquartam Primi. Et quoniam Rectangulum A D F H producitur ex segmento A D in A F (hoc est in C), & D E H K ex segmento D E in eandem C: ac denique E B K G ex segmento E B in eam ipsam: atq; hæc tria totum Parallelogrammum A B F G componunt: manifesta est Propositio.



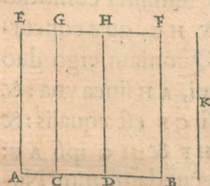
THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si recta linea vtcunque secta fuerit: quæ sub tota & quolibet segmentorum Rectangula continentur, æqualia sunt ei quod ex tota fit Quadrato.

Sit linea A B diuisa in A C, C D, & D B segmenta. Dico Rectangula quæ fiunt ex segmentis in ipsam A B simul sumpta, æqualia esse Quadrato eiusdem A B.

Quod manifestum erit, descripto Quadrato A B E F, ductisq; lineis C G & D H, quæ sint lateribus Quadrati paralleli & æquales.

ALITER. Sumatur K æqualis A B. Eritq;, per antecedentem, quod fit ex K in totam A B, æquale ijs quæ fiunt ex eadem K in quælibet segmenta ipsius A B. Et quia quòd ex K in A B, æquale est ei quod ex A B in seipsam: & quæ ex K in quælibet segmenta ipsius A B fiunt, æqualia ijs quæ ex A B in suas partes, propterea quòd K & A B sunt æquales: constat Propositio.

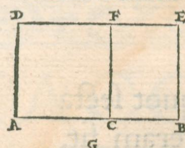


THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si in duo segmenta fuerit linea diuisa: quod ex tota in alterutrum segmentorum fit Rectangulum, æquale est ei quod ex segmentis fit Rectangulo, eiq; quod ex priori segmento fit Quadrato.

Sit linea AB diuisa in AC & CB segmenta. Dico Rectangulum ex tota AB in AC segmentum, æquale esse Rectangulo quod ex AC in CB, eiq; quod ex AC in seipsum, simul sumptis.

Describatur ex AC, Quadratum ACDF: Et producta DF ad E punctum, connexaq; BE parallelo, perficiatur Parallelogrammum ABDE. Quod quum constet ipso Quadrato ACDF & Parallelogrammo FB, quod est ex CB in AC: manifesta est Propositio.



ALITER, ex prima huius. Sumatur G æqualis AC. Et quoniã totum BD Parallelogrammum fit ex G in AB, quum sint AD & G æquales: & CD Quadratum ex eadem G in AC segmenta (lineæ enim æquales sunt) & deniq; FB Parallelogrammum, ex eadem G in CB segmentum: atque his æquale est quod fit ex G in AB, per primam huius: erit quod fit ex AC in AB æquale ei quod fit ex AC in BC, & in seipsum, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

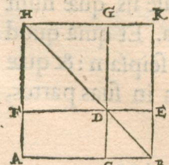
Si recta linea secetur vtcunque: Quadrata quæ fiunt ex segmentis cum eo quod bis sub ipsis segmentis comprehenditur Rectangulo, æqualia sunt ei quod à tota fit Quadrato.

Consectarium.

Quæ circa Dimetientem Quadrati consistunt Parallelogramma, Quadrata esse oportet.

Sit recta linea AB, secta in partes AC & CB. Dico duo Quadrata ex AC & CB cum eo quod bis sub ijsdem AC & CB continetur Rectangulo, esse æqualia Quadrato totius AB.

Ex altera partium, vt ex CB, describo Quadratum CBDE: & productis lateribus ED & CD, ponam DF & DG æqualia ipsi AC: & perficiam Quadratum DFGH: Quod constat esse Quadratum ipsius AC. Tum connexa FA, erit CF Parallelogrammum Rectangulum, per trigesimamtertiam & trigesimamquartam Primi. Quod est ex CB in AC: quum CD sit ipsi CB æqualis. Similiter constituo alterum Parallelogrammum Rectangulum DK, productis BE & HG, quæ concurrant ad punctum K: quod eadem ratione fit ex CB in AC. Quoniam ergo duo anguli DFH & DFA sunt recti: erit per decimamquartam primi, AH linea vna: & eadem ratione HK linea vna, & BK etiam vna. Et quia GK ipsi CB est æqualis: & AF eidem CB, quia æqualis ipsi EB: item HF & HG ipsi AC: erunt duæ AH & HK toti AB æquales, per secundam animi Notionem. Itidem & BK eidem AB æqualis. Quum itaque quatuor anguli A, B, H, K sint recti, erit ABHK Quadratum: & nonnisi ipsius AB, quum sit vnum laterum. Quare, quum ipsum compleatur Quadratis duarum AC & CB, duobusq; Supplementis quæ sub CB & AC comprehenduntur: constat Propositio.



HANC Demonstrationem, meo iudicio, expeditiorem reddidi, quàm sit ea quæ per Diametros & angulos semirectos astruitur verbosiùs. Nihil est enim quod magis oneret memoriam, quàm longè ducta Demonstratio: in ijs præsertim Propositionibus quas vel ipsa constructio manifestas reddit. Diametrum tamen apposuimus: vt quouismodo cõstitutio innotesceret. Scilicet descripto Quadrato BD, & eius Diametro

metro producta, dum concurrat cum AF prius erecta, ad punctum H: tum perfectum ABHK Parallelogrammum probabitur esse Quadratum: & DFGH itidem Quadratum, per semirectos angulos Triangulorum. Quod ego ratiocinationi cuiusque relinquo.

ALITER. Sit linea AB, vt prius, diuisa in AC & CB. Eritq;, per secundam huius, quod fit ex tota AB in se, æquale ei quod fit ex ipsa in AC & CB. At ex ipsa in AC tantum fit, quantum ex AC in se & ex AC in BC, per tertiam huius. Item ex ipsa AB tota in BC, tantum fit, quantum ex CB in se & ex CB in AC, per eandem. Quod igitur fit ex tota AB in se, æquum est ijs quæ fiunt ex AC in se & in CB, & ex CB in se & in AC, Quod erat demonstrandum.

Hæc secunda Demonstratio est Campani. Sed, vt ipse subijcit, ex ea non constat Consectarium. Quod nos quum iam probauerimus ad quadragesimamsextam Primi: hoc ipsum Theorema sic facilè ostendemus.

Ex ipsa AB diuisa in AC & CB vt prius, constituatur Quadratum ABDE, cuius Diameter BD: ducatur Parallelus CF, secans Diametrum in puncto G: itemq; altera Parallelus HK per idem punctum G. Ac tum, ex Demonstratione nostra, erunt KF & CH Quadrata, eaq; ipsorum AC & CB: vt satis constat ex constructione. Prætereà duo AG & GE Supplementa, sunt quæ fiunt ex AC in BC. Quare quum hæc quatuor perficiant totum ABDE Quadratum: manifesta est Propositio.

Hæc etiam proponi potest in hæc verba,

Si duæ lineæ inæquales fuerint: quod fit ex maiori in seipsam, æquum est ei quod ex minori in seipsam cum duobus quæ fiunt ex excessu in maiorem & ex eodem in minorem, Parallelogrammis.

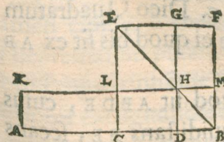
Scilicet AB linea excedat AC lineam, portione CB. Constabit Quadratum maioris AB, Quadrato minoris AC cum eo quod fit ex CB in AB (vt est in posteriore Figura Parallelogrammum AH), & altero quod fit ex eodem CB in minorem AC, quod est GE Parallelogrammum.

In quo rerum imaginem iucundè contemplari subit. Nempè quod deest lineæ AC, ducetur in ipsam: hoc est, CB in AC: sed & quod superest ipsi AB (id ipsum verò est CB) ducetur in ipsam AB: sicq; ex duabus vna fiet potentia.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in duo æqualia duoq; inæqualia: Rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius vnà cum Quadrato quod à medio segmentorum, æquale est ei quod à dimidia fit Quadrato.

Sit recta linea AB æqualiter diuisa in puncto C, & inæqualiter in puncto D. Dico Quadratum CB, esse æquale ei quod fit ex AD in DB cum Quadrato CD.



Describam ex CB Quadratum CBEF, cum Diametro BE: & ducam DG ipsi BF parallelum, secantem Diametrum in puncto H, & EF in puncto G. Et per punctum H ducam KM æqualem & æquidistantem AB, per trigesimamprimam Primi, secantem BF in puncto M, & CE in puncto L: Et connectam AK æquidistantem CE. Eruntq;, per Consectarium antecedentis, seu per ea quæ probauimus ad quadragesimamsextam Primi, LG & DM

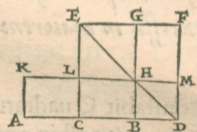
Quadrata: LG quidem lineæ CD: & DM, lineæ DB. Et quia DH eſt æqualis DB: erit AH id quod fit ex ductu AD in DB. Et quia, per quadrageſimamtertiam Primi, duo Supplementa CH & HF ſunt æqualia: addito Parallelogrammo DM vtriq;,erit CM æquale DF. Quum itaque AL ſit æquale CM, per trigeſimamſextam Primi: erit & ipſum æquale DF. Gnomon igitur CBGH æqualis eſt AH Parallelogrammo. Sed Gnomon ipſe cum Quadrato LG, conſtituit Quadratum dimidiæ AB. Quare AH Parallelogrammum & Quadratū LG, ſunt æqualia Quadrato dimidiæ AB, Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Si recta linea in duo æqualia ſecetur, alia verò ei linea addatur in continuum: quod ex tota iam compoſita in eam quæ addita eſt, cum Quadrato quod fit à dimidia, æquum eſt ei quod à dimidia cum addita tanquàm ab vna, fit Quadrato.

Sit linea AB æqualiter diuiſa in puncto C: eiq; addita BD. Dico id quod fit ex compoſita AD in additam BD cum Quadrato dimidiæ CB, eſſe æquale Quadrato CD.

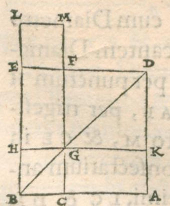
Deſcribam ex CD, Quadratum CDEF, cuius ſit Diameter ED. Et ducam BG æqualem & æquidiſtantem DF, quæ ſecet Diametrum in puncto H. Et per ipſum H punctum, ducam KM æqualem & æquidiſtantem AD, ſecantem DF in puncto M, & CE in puncto L: Et connectam AK æquidiſtantem CL.



Iam per Conſectarium quartæ huius, vtrunque Parallelogrammum LG & BM eſt Quadratum: hoc quidem ex BD, illud verò ex CB: & propterea DM æqualis BD: totumq; AM Parallelogrammum, eſt quod fit ex AD in BD. Quia ergo, per trigeſimamſextam Primi, AL eſt æquale CH: & per quadrageſimamtertiam eiuſdem, Supplementum CH æquale Supplemento HF: erit & AL eidem HF ęquale. Quare Gnomon CDGH, toti AM Parallelogrammo æqualis. Sed Gnomon CDGH cum Quadrato LG, conſtituit Quadratum lineæ CD. Quare AM Parallelogrammum cum Quadrato LG, æquale eſt Quadrato lineæ CD, Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur in duas quantaſcunq; partes: Quadratum quod à tota cum Quadrato quod ab vna partium, æquale eſt ei quod bis producitur ex tota in ipſam partem Rectangulo, cum eo quod ex altera parte fit Quadrato.



Sit linea AB, fortuitò diuiſa in puncto C. Dico Quadratum totius AB cum Quadrato BC, æquale eſſe ei quod bis fit ex AB in BC cum Quadrato AC.

Deſcribatur Quadratum totius AB, quod ſit ABDE, cuius Diameter BD: ducaturq; CF æqualis & æquidiſtans BE, ſecans Diametrum in puncto G: & per G punctum, HK æqualis & æquidiſtans AB.

Quia

Quia igitur Quadratum A E cum Quadrato C H, est æquale Quadrato K F cum duobus Parallelogrammis A H & C E, patet Propositio.

Si quis manifestiùs perspicere velit, faciat H M Parallelogrammum æquale H A Parallelogrammo, vt E M sit Quadratum B C. Ac tum omnes apparebunt Propositionis particulæ.

THEOREMA 8. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur vtcunque: Rectangulum comprehensum quater sub tota & vno segmentorum cum eo quod ex altero segmento fit Quadrato, æquale est ei quod à tota cum priori segmento tanquam ab vna describitur, Quadrato.

Recta linea A B secetur vtcunque in puncto C. Dico id quod quater sub A B & C B continetur Rectangulum vnà cum Quadrato quod ex A C, æquale esse ei quod ex A B & B C tanquam ex vnica linea, Quadrato.

Producatur A B in D punctum, & sit B D æqualis C B: Et ex A D describatur Quadratum A D E F. Tum ducta Diametro D E, lineisq; C G & B H parallelis & æqualibus ipsi D F, quæ secent Diametrum in punctis K & L: & per ipsa K & L puncta, ductis M O & P R parallelis & æqualibus ipsi D A: Erit, per Consectarium quartæ, huius vnaquæque Superficierum R G, N Q, B M, & C P, quadrata. Quumq; B D & B L latera Quadrati B M, sint æqualia C B & B L lateribus Parallelogrammi C L: erit & ipsum C L Quadratum: similiq; ratione L P Quadratum: ob idq; quatuor Quadrata componentia C P Quadratum, inter se æqualia. Et quia totus Gnomon A D G K circunstans Quadratum R G, est, per trigesimamsextam, & quadragesimamtertiam Primi, quadruplus ei quod ex A B in B D fit Rectangulo, quia quadruplus ad Superficiem A L: constat Propositio: Scilicet A L sumptum quater cum Quadrato R G, esse Quadrato A D E F æquale.

De Gnomone autem euidentiùs perspiciemus, si aduerterimus Superficiem mutilam A D K R, esse duplam ad superficiem A L. Duo enim Triangula K N L & L B D, sunt æqualia Quadrato C L. Idemq; de altera parte D F G K sit iudicium. Quod nos si prolixiùs exponeremus, ingenium studiosorum obrueremus potiùs quàm instrueremus. Eæ enim figurationes Gnomonum eiusmodi sunt, vt sese ob concinnitatem sponte elucident.

Campanus hoc Theorema proponit in hæc verba,

Si linea in duas partes secetur, atque ad ipsam addatur recta linea vni segmentorum æqualis: quod ex tota composita in seipsam fiet, æquale erit ijs quæ ex ductu prioris lineæ in ipsam additam quater, & ei quod ex altero segmento fit Quadrato.

Id verò in idem recidit cum priore. Est enim B D ipsi C D perpetuò æqualis. Sed tamen eiusmodi varietates inutiles non sunt: quippe quæ ingenium ad horum Theorematum praxin & vsum instructius reddant. Neque incommodè fecerit qui se in Propositionibus Geometricis, huius præsertim Secundi libri variandis, immò & notis excogitandis exercuerit. Cuiusmodi satis multas adscribere possemus. Sed eæ priuatim à Geometra sunt examinandæ, non inter reliquas collocandæ. Tædiosum est enim hæc Theoremata congerere quæ cum Numeris communicant. Eamq; ob caussam, nec sine iudicio, paucis fuit contentus Euclides.

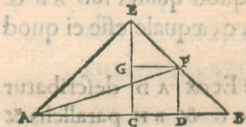
THEO

THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Si recta linea in duo æqualia duoq; inæqualia diuidatur: quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt Quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia cum eo quod à medio segmentorum fit Quadrato.

Sit linea AB diuisa æqualiter in puncto C, & inæqualiter in D. Dico duo Quadrata quæ ex AD & DB, dupla esse duorum quæ ex AC & CD, Quadratorum.

Super punctum C erigo perpendicularem CE, æqualem vtrique AC & CB: Et connecto EA & EB. Eruntq;, per quintam & trigesimamsecundam Primi, duo anguli A & B semirecti: & vterque qui ad E, semirectus: sicq; totus E rectus. Erigo itaque DF perpendicularem super AB, secantem EB in puncto F. Et erit, per eandem trigesimamsecundam, angulus BFD semirectus: quapropter DB & DF latera, per sextam Primi, æqualia. Iam à puncto F duco FG æquidistantem, ob idq; æqualem CD. Et erit, per secundam partem vigesimænonæ, & per trigesimamsecundam Primi, vterque angulus qui ad G, rectus, & angulus EFG semirectus: est enim FEG semirectus. Quapropter EG & FG latera, per sextam Primi, æqualia. Tandem connecto AF. Et quoniam Quadratum EF, per quadragesimamseptimam Primi, æquale est Quadratis duarum EG & GF: ipsum erit duplum ad Quadratum GF: ob idq; ad Quadratum CD. Eadem ratione erit Quadratum EA duplum ad Quadratum AC. Quumq; Quadratum AF sit æquale Quadratis AE & EF, per eandem: ipsum erit duplum ad Quadrata AC & CD. Sed & idem Quadratum AF æquale est Quadratis AD & DF. Et Quadrata igitur AD & DF dupla sunt ad Quadrata AC & CD. Et quia Quadratum DB est æquale Quadrato DF: erunt duo Quadrata AD & DB, dupla ad duo AC & CD, Quod erat demonstrandum.



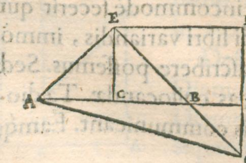
IN HAC contueri licet quantam vim habeant Rectum & Æquale. Quatuor enim Triangulis Isoscelibus Rectangulis, id est, ex quatuor Semiquadratis, tota nititur probatio.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur in duo æqualia, apponatur autem ei alia in continuum: quod ex tota iam composita, quodq; ex apposita ambo fiunt Quadrata, dupla sunt amborum, eius scilicet quod ex dimidia eiusq; quod ex dimidia cum apposita, Quadratorum.

Sit recta linea AB æqualiter diuisa in puncto C: eiq; in continuum apposita BD. Dico id quod fit ex AD Quadratum cum Quadrato quod ex BD, duplum esse eius quod ex AC cum eo quod ex CD Quadrato.

Erigo CE perpendicularem super AB, & æqualem vtrique linearum AC & CB: Et connecto AE & EB. Eritq;, per quintam & trigesimamsecundam Primi, vterque angulus A & B: item vterque qui ad E, semirectus: totusq; E rectus.



A puncto itaque E, duco EF æqualem & æquidistantem CD: & connecto FD, quam protraho donec concurrat cum linea EB protracta, ad punctum G: Tum connecto AG.

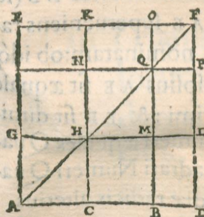
Et quia angulus ECD est rectus: erit, per vltimã partẽ vigesimænonæ Primi, angulus CEF, rectus. Quum igitur

tur angulus C E B ſit ſemirectus: erit & F E G ſemirectus. Quumq́; F D, per trigeſimamtertiam Primi, ſit æquidiſtans E C: erit, per trigeſimamquartam eiuſdem, angulus qui ad F, rectus: ſicq́, angulus E G F, per trigeſimamſecundam, ſemirectus: quia F E G ſemirectus. Et, per eandem, angulus D B G ſemirectus: quum angulus B D G, per decimamtertiam eiuſdem, ſit rectus. Duo igitur latera E F & F G, per ſextam eiuſdem, ſunt æqualia: itidemq́; duo B D & D G æqualia. Quapropter Quadratum E G, per quadrageſimamſeptimam Primi, duplum eſt ad Quadratum E F: ob id, & ad Quadratum C D. Quadratum item A E, per eandem, duplum eſt ad Quadratum A C. Quumq́; Quadratum A G, per eandem, ſit æquale duobus Quadratis A E & E G, ſimiliter & duobus Quadratis A D & D G: ſitq́; Quadratum D G æquale Quadrato B D: erunt duo Quadrata A D & D G (ea ſunt A D & B D) dupla duobus Quadratis A C & C D, Quod fuit demonſtrandum.

ALITER. Sit linea A B bifariam diuiſa in C, eiq́; in continuum adiuncta B D. Dico Quadratum quod ex A D cum Quadrato quod ex B D, duplum eſſe ad vtrunque, & quod ex A C & quod ex C D ſit Quadratum.

Ex tota A D deſcribo Quadratum A D E F. Et ſuper dimidia A C deſcribo Quadratum A C G H: protractisq́; G H & C H ad ſectiones duorum laterum E F & D F, deſcribo H L K F: quod erit Quadratum ipſius C D: vt conſtat ducta Diametro A H F, ex Conſectario quartæ huius & ex trigeſimaquarta Primi: eſt enim K F æquale C D. Factis etiam H M & H N vtrique A C & C B æqualibus, protraho M O & N P, ſeſe ſcindentes ad rectos angulos in puncto Q. Quarum vtraque ſecet latera Quadrati A D E F in O & P punctis.

Iam verò nihil attinet probare H Q eſſe Quadratum ipſius A C, quum ſit Quadratum C B: ſicut Q F Quadratum ipſius B D: neque H P Parallelogrammum, æquale eſſe vtrique Supplementorum E H & H D: quum H O ſit eis communiter æquale: Denique N O & Q L Supplementa eſſe æqualia.



Atque etiam manifeſta ſunt hæc ex ipſa Figuræ ſpecie: propterea quòd omnes anguli qui circa Diametrum, ſunt ſemirecti & latera æqualia. Diligenter itaque aduertentes quibus partibus componatur Quadratum H F, quod eſt ex C D: ſic ratiocinabimur. Quum totum D E Quadratum integretur duobus A H & H F Quadratis & duobus Supplementis E H & H D: probandum nobis eſt, hæc ipſa Supplementa cum Quadrato Q F (quod eſt ex B D) eſſe æqualia duobus ipſis A H & H F Quadratis. Tum enim probauerimus hæc duo Quadrata A H & H F bis ſumpta, toti Quadrato D E cum Quadrato Q F eſſe æqualia, quod initio ſuſcepimus. Sic autem erit Demonſtratio.

Supplementum E H æquale eſt Parallelogrammo H P: Et Quadratum A H cum Supplemento minori N O, æquum eſt alteri Supplemento H D, per primam animi Notionem, toties ſumptam quoties opus fuerit. Duo igitur Supplementa E H & H D, ſunt æqualia Quadrato A H & Gnomoni K H L Q. Si ergo ad vtrunque accedat Quadratum Q F: erunt duo Supplementa E H & H D cum Quadrato Q F, æqualia Quadrato A H, Gnomoni K H L Q, & Quadrato Q F. Sed hæc tria conſtituunt duo Quadrata A H & H F. Sunt igitur duo Supplementa E H & H D cum Quadrato Q F, æqualia duobus Quadratis A H & H F, Quod erat ſecundarium. Quare duo Quadrata A H & H F bis ſumpta, toti Quadrato D E cum Quadrato Q F ſunt æqualia, Quod erat probandum.

HÆC Demonſtratio longiorem quidem habet deductionem, ſed nihilominus acutam: Quam nos ex Figura Gnomonica venati ſumus: Ex qua huiuſce libri Secundi, immò totius ferè Geometriæ Demonſtrationes inſigniores hauriuntur.

PROB

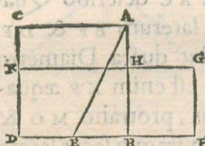
PROBLEMA 1, PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam sic secare, vt quod ex tota & altero segmentorum fit Rectangulum, æquale sit ei quod ex altero segmento fit Quadrato.

Sit linea A B sic diuidenda, vt quod ex tota in vnum segmentorum fiet Rectangulum, æquale sit ei quod ex altero segmento fiet Quadrato.

Describo ex A B, Quadratum A B C D. Cuius latus B D diuido per æqualia in E: & connecto A E: Et protraho E B ad F punctum, vt sit E F æqualis A E: Et ex B F, portione exteriori, describo Quadratum B F G H: vt B H latus resectum sit ex A B. Dico A B sic sectam esse in puncto H, vt quod fit ex A B in A H, æquale sit Quadrato quod ex H B.

Protraho G H ad K, punctum lateris C D, æqualem & æquidistantem A C: Eritq; H C Rectangulum ex A H in A B: quod probabitur æquale B F G H Quadrato.



Quoniam enim linea B D diuisa est per æqualia in E, atque eidem addita linea B F: erit, per sextam huius, quod fit ex D F in B F cum Quadrato E B, æquale Quadrato E F: quapropter & Quadrato E A: ob idq;, per quadragesimamseptimam Primi, Quadratis A B & E B. Ablato igitur vtrinque Quadrato E B, erit quod fit ex D F in B F (quod est Parallelogrammum F K) æquale Quadrato lineæ A B. Dempto igitur vtrinque Parallelogrammo B K, supererit Quadratum B G æquale Parallelogrammo H C, Quod fuit demonstrandum.

OBSERVABIMVS hoc Problema nequaquam, vt cæteras huius Secundi Libri Propositiones, ad Numeros reduci posse. Quum enim posuerimus latus D B (id est A B) atque in duo æqualia diuiserimus, vt in E puncto: linea A E superueniens rationem conturbat: hoc est, nullam habet rationem ad latus A B nominatam: ob idq; per Numeros minimè explicabilem. Nam quum Quadratum ipsius A E sit æquale duobus Quadratis A B & E B, per quadragesimamseptimam Primi: & E B sit dimidium A B: erit ipsum A E irrationale. Vt enim duo Quadrati Numeri æquales Quadratum Numerum iuncti efficere non possunt: ita nec duo Quadrati Numeri Quadratum Numerum efficient, quorum alter sit Quadratum dimidiæ radicis alterius.

Id nos exemplo notum faciemus. Quadra 8, fiunt 64: hæc geminata nunquàm Quadratum Numerum constituent. Ita, diuidantur 8 in duo æqualia, fient 4. Certè Quadrata duorum 8 & 4, quæ sunt 64 & 16, Quadratum Numerum efficere non possunt: faciunt enim 80. Hoc verò esset necessarium, vt hoc Problema in Numeris locum haberet. At verò per Numeros Irrationales figurabitur in hunc modum.

Sint 8 sic diuidenda, vt quod ex toto in alteram fiet partium, æquale sit ei quod ex reliqua parte fiet Quadrato.

Duco 8 in se, fiunt 64, hoc est, Quadratum A B C D. Diuido 8 in duo æqualia, fiunt 4, vt D E aut E B linea. Duco 4 in se, fiunt 16: hæc addo ad 64, proueniunt 80: quorum radix est ℞ 80. Ea est linea A E seu E F, per quadragesimamseptimam Primi. Quum itaque E F sit ℞ 80, & E B sit 4: erit B F, ℞ 80 m̃ 4. Ac tanta erit B H. Sed A H erit 8 m̃ ℞ 80 m̃ 4: hoc est, 12 m̃ ℞ 80. Iam 12 m̃ ℞ 80, ducta in 8, tantundem efficiunt quantùm ℞ 80 m̃ 4 in se ducta, sicut vult hæc vndecima. Hæc verò in secundo nostræ Algebræ volumine abundè explicauimus: quam nos propediem, Deo iuuante, latinam faciemus.

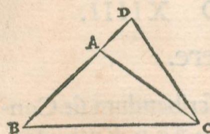
Atque has omnes Secundi Libri Propositiones Campanus Numeris accommodat, sub Decimamsextam Noni, hanc tamen vndecimam omninò à Numeris excludit. Neque interim de Irrationalibus verbum vllum facit.

THEO

THEOREMA 11, PROPOSITIO XII.

In Amblygoniis Triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit Quadratum, tanto maius est duorum reliquorum Quadratis quantum est id quod continetur bis sub vno horum, & eo quod ipsi adiungitur in quod perpendicularis cadit, augmento.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A obtusus. Et protracto latere BA interminatè, ducatur, per duodecimam Primi, à puncto C ad protractam, perpendicularis CD: vt sit AD augmentum lateris BA. Dico Quadratum lateris BC, tanto maius esse Quadratis duorum BA & AC laterum, quantum est id quod bis continetur sub BA & AD, Rectangulum: scilicet, Quadratum BC æquale esse Quadratis BA & AC cum eo quod bis fit ex BA in AD.



Est enim, per quartam huius, Quadratum BD æquale Quadratis duorum BA & AD & ei quod bis sub ipsis BA & AD continetur, Rectangulo. Et quia Quadratum BC, per quadragesimamseptimam Primi, est æquale duobus BD & CD: erit idem BC Quadratum æquale tribus Quadratis BA, AD, & DC & ei quod bis sub BA & AD continetur Rectangulo. At, per eandem, Quadratum AC, æquale est Quadratis AD & DC. Est igitur Quadratum BC æquale Quadratis BA & AC & ei quod bis sub BA & AD comprehenditur, Rectangulo, Quod fuit demonstrandum.

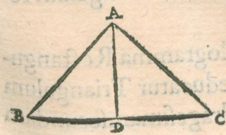
THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

In Triangulis, quod ex latere alterum acutorum angulorum subtendente fit Quadratum, tanto minus est duorum reliquorum laterum Quadratis, quantum est id quod bis continetur sub illo in quod perpendicularis introrsùm cadit & ea ipsius parte quæ perpendiculari anguloq; acuto interiacet.

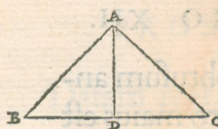
Quod Euclides de Triangulis Oxygonijs proposuit, nos cum Campano ad omnia Triangula ampliauimus. Triangula enim omnia duos, minimùm, habent acutos angulos.

Si itaque fuerit Oxygonium, à quolibet angulorum demittatur perpendicularis, Si verò Orthogonium aut Amblygonium, demittenda erit ab angulo recto aut ab obtuso: in id latus scilicet quod duobus acutis angulis interiacet: quæ omninò intra Triangulum cadet, vt demonstrauimus ad vigesimam Primi. Ac tum huius Theorematis Demonstratio tres Triangulorum species generatim complectetur.

Sit igitur Triangulum ABC, cuius duo anguli B & C acuti, quantuscunque sit angulus A. Ab angulo A, demitto perpendicularem AD in latus BC. Dico Quadratum lateris AB, tanto minus esse Quadratis duorum laterum AC & BC, quantum est duplum eius quod fit ex toto BC in partem DC. Vel etiam Quadratum AC, tanto minus esse Quadratis duorum AB & BC, quantum est duplum eius quod fit ex CB in BD.



Quadratum enim AC, per quadragesimamseptimam Primi, æquale est duobus Quadratis AD & DC: Et Quadratum BC, per septimam huius, cum Quadrato DC, æquale



æquale eſt Quadrato B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. Tria igitur Quadrata A C, B C, & D C, æqualia ſunt tribus Quadratis A D, D C, & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. Commune auferatur Quadratum D C: Erunt duo Quadrata A C & B C, æqualia duobus Quadratis A D & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. At Quadratum A B æquale eſt duobus Quadratis A D & B D. Quare idipſum A B Quadratum, tanto minus erit duobus A C & B C, quantum eſt duplum eius quod fit ex B C in D C, Quod erat probandum.

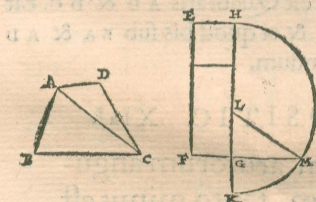
Hæc Demonſtratio, quam ab illa communi aliquantùm variauimus, directa eſt. Æſtimatio enim vtraque ponitur: vt à maiori auferatur minus.

Simili argumentandi ratione, probabitur Quadratum lateris A C, tanto minus eſſe Quadratis duorum A B & B C, quantum eſt duplum eius quod fit ex C B in D B, Rectanguli.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XIIII.

Dato Rectilineo æquale Quadratum deſcribere.

Sit datum Rectilineum A B C D, cui æquale Quadratum deſcribendum ſit. Conſtituo Parallelogrammum Rectangulum E F G H, æquale ipſi A B C D Rectilineo, per quadrageſimamquintam Primi. Cuius ſi latera fuerint æqualia, id ipſum erit quale voluimus. Sin minus, continuabo vnum laterum ipſius, vt H G, ad punctum K: & ponam G K æqualem lateri F G. Diuidam poſtmodùm totam H K biſariam, in



puncto L. Atque in ipſo L poſito Centro, deſcribam ſuper lineam H K, Semicirculum H M K: Et protraham F G latus, donec ſecet Semicirculum in puncto M. Dico Quadratum lineæ G M eſſe æquale Rectilineo A B C D.

Connectam L M. Et quia linea H K diuiſa eſt æqualiter in L, & inæqualiter in G: erit, per quintam huius, quod fit ex H G in G K cum Quadrato G L, æquale Quadrato L K: ob id, Quadrato L M: quapropter & duobus Quadratis L G & G M, per quadrageſimamſeptimam Primi. Dempto ergo vtrinque Quadrato L G: erit quod fit ex H G in G K (id verò eſt Parallelogrammum E G) æquale Quadrato G M. Quare & Quadratum G M æquale Rectilineo A B C D, Quod faciendum fuit.

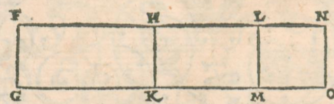
HOC etiam loco addere placuit ex Campano, Compendium inueniendi lateris Tetragonici: ad eas Figuras, quas vocant Irregulares, æquandas.

Sit Figura quæpiam anormis, A B C D, quatuor laterum: Quæ in terna Triangula reſoluetur A B C, A E C, & E C D.

Hæc tria, ſecundùm doctrinam huius, reduco ad tria Quadrata: quorum latera ſint, verbi gratia, F G, F H, & H K. Tum ſtatuo F G & F H ad angulum rectum F: & connecto G H: ſuper quam erigo H K, itidem ad angulum rectum G H K: Et connecto G K. Et erit G K latus Tetragoni quæſiti: vt ſatis manifeſtum eſt ex Propoſitione illa quadrageſimaſeptima Primi.

In Figuris autem Regularibus, quę in Triangula æqualia reſoluũtur, compendium multò promptius eſt. Expeditè enim ad vnum Parallelogrammum Rectangulum reducuntur, & indè ad Quadratum.

ALITER. Conuertantur ſingulatim Triangula in Parallelogramma Rectangula, quæ vnum Parallelogrammum efficiant. Verbi gratia, reducatur Triangulum A B C ad Parallelogrammum F G H K Rectangulum, per quadrageſimamſecundam Primi.



Primi. Tum ſuper linea HK conſtituatur Parallelogrammum itidem Rectangulum HKLM, æquale Triangulo ACE, per quadrageſimamquartam eiuſdem. Demùm, per eandem, ſuper linea LM conſtituatur Parallelogrammum LMNO, æquale Triangulo CDE.

Eritq; FGNO vnum Parallelogrammum, per quadrageſimamquintam Primi: atque æquale toti Figuræ Rectilineæ ABCDE. Quod, per hanc vltimam, conuertes in Quadratum.

Libri Secundi Geometricorum Elementorum

FINIS.





IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER TERTIVS.



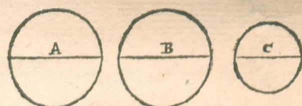
DEFINITIONES.



Equales Circuli, ſunt quorum Diametri ſunt æquales: vel quorum quæ ex Centro lineæ, ſunt æquales.

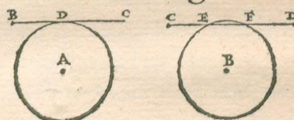
Quum Circuli peripheria infinitatem præ ſe ferat, Circuli dimenſio à Peripheria non petitur, ſed à linea recta, nempè à Diametro.

Hæc verò Definitio ex ſe clara eſt. Nam quum Diametri per Circulorum Centra educantur, & dimidium orbium ſemper ſubtendant: ſi ſint ipſæ æquales, ab iiſdem quoque dimidia æqualia ſubtendi par eſt. Quorum verò dimidia ſunt æqualia, ea inter ſe ſunt æqualia.



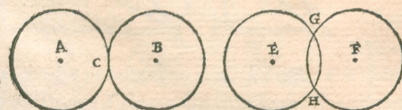
Vt, Æquales quidem ſunt A & B Circuli, ob æqualitatem Diametrorum: maiores autem C Circulo: quum minor ſit huius Dimetiens. Sed & æquè ſignificans eſt & manifeſta altera pars Definitionis, vel ex ea, quam in Principiis Libri Primi poſuimus, Circuli Definitione.

2 Contingere Circulum recta linea dicitur, quæ Circulo incumbens in vtranq; partem eiecta, Circulum non ſecat.



Circulum A, linea B C contingit in D puncto. Sed Circulum B, linea C D ſecat in E & F punctis.

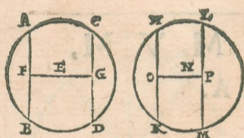
3 Circuli ſeſe contingere dicuntur, quorum Peripheriæ ſeſe tangentes, inter ſe non ſecant.



Duo Circuli A & B ſeſe contingunt in C. Duo verò E & F, ſecant alter alterum in G & H punctis.

4 Aequaliter diſtare à Centro, lineæ dicuntur, quum à Centro ad ipſas ductæ perpendiculares ſunt æquales. Remotior autem à Centro linea, in quam maior perpendicularis cadit.

Vt in



Vt in Circulo ABCD, duæ lineæ AB & CD æqualiter distant ab E Centro: propterea quòd duæ EF & EG perpendiculares, sunt æquales. At in Circulo HKLM, remotior est HK à Centro N quàm sit LM. Est enim NO ipsa NP maior.

5 Sectio Circuli, est Figura comprehensa sub recta linea & peripheriæ portione.

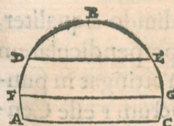
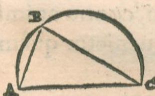


Figura ABC, quam constituunt AC recta & ABC portio peripheriæ: Item DBE, quam constituunt DE recta & DBE portio eiusdem, Sectiones sunt Circuli. Rectæ verò AC & DE, Chordæ vulgò dicuntur: sicut curuæ ABC & DBE, Arcus. Sed FBG figura, proprio nomine Semicirculus vocatur: & FG, Diameter.

6 Angulus sectionis, est qui sub recta linea & Circuli peripheria comprehenditur.

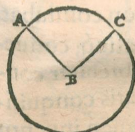
In posterioribus Figuris, Anguli D, A, E, & C, Sectionis dicuntur.

7 In sectione angulus consistit, quem efficiunt duæ lineæ, à subtensæ basis finibus ad punctum aliquod peripheriæ sectionis concurrentes.



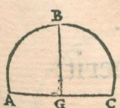
Angulus ABC, qui fit à duabus AB & BC rectis, quæ exeuntes à duobus terminis A & C subtensæ AC, ad punctum B coëunt: in sectione consistit. Quòd si angulum B absque basi AC: hoc est, sine Trianguli consideratione accipias: is in peripheria esse dicetur.

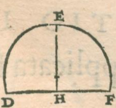
8 Sector Circuli, est Figura comprehensa sub lineis rectis quæ à duobus peripheriæ punctis eductæ: ad Centrum conueniunt.



Duæ lineæ AB & CB, à duobus punctis A & C peripheriæ, ad Centrum B concurrentes, Circuli Sectorem ACB constituunt.

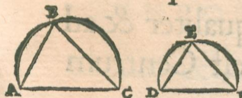
9 Similes Sectiones Circuli, dicuntur quæ angulos æquos suscipiũt: vel in quibus anguli sunt æquales.





Vt, si angulus rectilineus B, Sectionis ABC, æqualis sit angulo E, Sectionis DEF: duæ Circuli Sectiones ABC & DEF dicentur Similes.

AEQVALES verò Sectiones non definit: quia earum infinitæ sunt descriptiones. Possunt enim sub inæqualibus rectis lineis æquales Sectiones constitui, sed in Circulis inæqualibus: quum ex omni Circulo possit intelligi pars abscindi, parti alterius Circuli æqualis. Sed quæ æquales sunt & rectis lineis æqualibus continentur, æquales omnino habent peripherias. Diuisisq; rectis lineis bifariam, perpendiculares ad peripheriam erectæ, æquales sunt. Vt duæ Sectiones ABC & DEF, sub lineis AC & DF æqualibus constitutæ, si sint æquales, duæq; AC & DF diuidantur bifariam in punctis G & H: erunt quoque duæ perpendiculares BG & EH æquales. Quod nos præmittendum duximus, demonstrandæ vigesimæsecundæ & vigesimætertiæ huius gratia: quum significantior Definitio dari non possit Sectionum Æqualium. Nam si in Circulis æqualibus, quælibet puncta vtriusque æqualiter distant à linea subtensa, nulla est inæqualitas portionum.



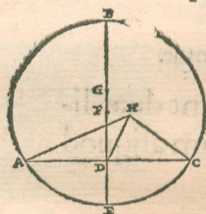
PROBLEMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.


Ati Circuli Centrum inuenire.

Sit datus Circulus A B C, cuius Centrum sit inueniendum.

In ipso Circulo duco lineam fortuitam A C: quam diuido æqualiter, per Decimam Primi, in puncto D: A quo excito perpendicularem D B, per vndecimam eiusdem: quę vtrinque protracta, peripheriam attingat in punctis B & E. Hanc etiam B E diuido æqualiter in puncto F. Dico punctum F esse Centrum Circuli.

Nam si in F non est Centrum, non erit in puncto alio lineæ E B, vt in G: Essent enim à Centro ad peripheriam duæ G B & G E inæquales. Erit ergo extra E B lineam: sitq;, si possit, in H puncto. Et connectantur H A, H C, & H D: vt fiat Triangulum H A C, diuisum in duo Triangula H A D & H C D. Et quia duo latera H A & H D, Trianguli H A D, sunt æqualia duobus lateribus H C & H D, Trianguli H C D, & basis A D basi D C æqualis: erit, per octauam Primi, angulus A D H æqualis angulo C D H: quapropter vterq; rectus, per decimam Definitionem Primi. At angulus A D B positus est rectus: Erit igitur angulus A D B ipsi A D H æqualis, pars toti, contra animi sensum. Non est igitur Centrum in H puncto. Sed nec vspiam alibi inuenietur quàm in F puncto, Quod erat ostendendum.



VIDES ex Recto & Æquo, punctum omnium maximè momentaneum peruestigari. In quo rationi conueniens erat, vt linea E B in vtranque partem æqualiter (vt indicat perpendiculum) inclinata, Circulum diuideret per medium: atq; ob id, Centrum in se contineret. Sed quoniam id repræsentabatur tantùm, non constabat: ad absurdum perducitur qui aduersatur. Vt in Circulo Affirmatio Negatioq; conueniant: sicut in Vniuerso Actio & Priuatio, Generatio & Corruptio. Ac breuiter contrariis omnia constant & perficiuntur. Centri igitur inuestigatio, veritatis conquisitionem graphicè exponit: quæ quum vna sit, atq; in medio posita: tamen inuentu longè difficillima, per controuersias elucescit: ac non nisi bono & æquo obsequitur.

Consectarium.

Si in Circulo recta linea rectam lineam æqualiter & ad angulos rectos diuidat: in diuidente est Centrum Circuli.

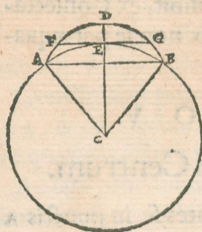
Hoc verò satis patet ex Demonstratione iam posita. Si igitur duæ lineæ in Circulo æqualiter secent altera alteram: Centrum in puncto sectionis situm erit. Quod tamen posterius probabitur.

THEOREMA I, PROPOSITIO II.

Si ad duo puncta peripheriæ recta linea applicata fuerit: ipsa intra Circulum transit.

Sint duo puncta A & B, in peripheria Circuli A B, cuius Centrum C. Dico non posse educi lineam rectam ab A ad B, quin secet Circulum. Alioqui, transeat extra Circulum, vt linea A D B: quæ sit recta, si fieri possit. Et connectantur C A & C B: vt

sit recta



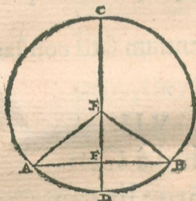
sit recta A D B, basis Trianguli C A B. Eruntq́, per quintam Primi, duo anguli C A B & C B A æquales. Tum à Centro C ducatur recta C D, quæ secet peripheriam in puncto E. Et erit, per decimamsextam Primi, angulus A D C maior angulo C B D: ob idq; maior angulo C A D: ac propterea latus A C, per decimamoctauam eiusdem, maius latere C D. Et quia latus C E æquale est lateri C A: erit C E maius C D, pars toto, quod est absurdũ. Quare linea A D B non transibit, vt recta sit, extra Circulum: sed secabit ipsum, Quod erat probandum.

HÆC Propositio tacitè consequebatur ad Definitionem Sectionis Circuli: quæ omni arcui rectam subtensam tribuit: Subtensa autem intra Circulum existente, nulla alia extra Circulũ recta, in eadẽ puncta terminabitur, ne duæ rectæ superficiẽ cõcludant. Item & ex linea cõtingente Circulum. Nam siqua recta linea est quæ cõtingat Circulũ: ipsa erit F G: quæ vtrinq; educta attinget lineã A D B, vt in pũctis F & G: Sicq; rursus duæ lineæ rectæ cõcludent superficiem, cõtra Principiũ. Et tamẽ fuit proponẽdum & demonstrandũ, ne in sequentibus cogeremur cõtradictiones sæpiùs excipere.

THEOREMA 2, PROPOSITIO III.

In Circulo, si recta linea per Centrum ducta rectam lineam extra Centrũ ductam bifariam secuerit: ipsam quoque ad angulos rectos diuidet: Et si ad angulos rectos diuiserit, ipsam etiam ad angulos rectos secabit.

Sit Circulus A B C: in quo linea D E per Centrum ducta, lineam A B extra Centrum ductam secet bifariam in puncto F. Dico angulos qui ad F, esse rectos: Contrà etiã, si anguli qui ad F recti, lineã A B bifariã diuidi in F puncto.



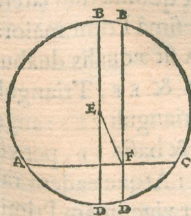
Connectam E A & E B. Eruntq́; duo latera E A & E F, Trianguli E A F æqualia duobus E B & E F, Trianguli E B F: basis verò A F basi F B, ex positione, æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus F vnius, æqualis angulo F alterius: & propterea recti, Quod est prius.

Iam vterq; angulus qui ad F, ponatur rectus. Et constat, ex quinta Primi, duos angulos A & B esse æquales: quum sint duo latera E A & E B æqualia. Quare in duobus Triangulis E A F & E B F, erunt, per vigesimamsextam Primi, duo latera A F & F B æqualia, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO IIII.

Si duæ rectæ lineæ se in Circulo secantes, per Centrum non transierint: neque se bifariam secabunt.

Sit Circulus A B C D, cuius Centrum E: in quo duæ lineæ A C & B D secent inter se in puncto F: quarum neutra, vel etiam altera tantùm, per Centrum transeat: Dico ipsas se mutuò non per æqualia secare. Nam si sic altera vtranque per æqualia secare possit: sit prius vt neutra per Centrum transeat. A Centro E ducam lineam E F. Eritq́;, per priorem partem antecedentis, vnusquisque angulorum E F A, E F B, E F C, & E F D, rectus, Quod fieri non potest, ne pars sit toti æqualis.



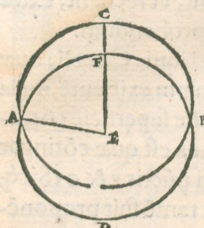
Si verò altera tantùm illarum, vt B D, per Centrum transierit: dico sic quoque ipsas se non bifariam secare. Nam, per priorem partem antecedentis, B D per Centrum transiens, diuidensq́; A C per æqualia, diuidet eandem ad angulos rectos.

 Et quia

Et quia A C diuidit ipsam B D æqualiter: ipsa per Centrum transibit, ex Consectario primæ huius, Quod est contra positionem. Quare A B & C D non se per æqualia secant, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO V.

Circulorum se mutuò secantium non est idem Centrum.

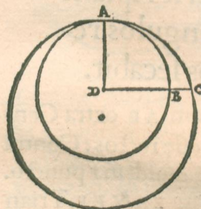


Sint duo Circuli A B C & A D B, secantes se in punctis A & B. Dico eorum non esse vnum Centrum.

Nam si vnum possit esse, sit ipsum E punctum: Et ducatur linea E A: ac mox linea E C: quæ secet A C B peripheriam in puncto C: & A D B alteram peripheriam in F. Eruntq́; , per Centri Definitionem, E A & E F æquales: sed & E A & E C æquales. Quare quum ambæ E F & E C sint æquales ipsi E A, erunt & ipsæ inter se æquales, Quod esse non potest. Non igitur E, sed nec vllum aliud punctum, erit vtriusque Centrum, Quod erat probandum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VI.

Circulorum se contingentium non est idem Centrum.



Sint duo Circuli A B A & A C A, se contingentes in puncto A. Dico eorum non esse idem Centrum.

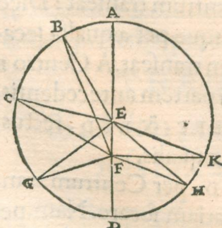
Si enim idem possit esse, sit ipsum D: Et ducantur D A & D B C lineæ. Eritq́; , per definitionem Centri & Circuli, vtraq; linearum D B & D C æquales ipsi D A. Quapropter D B æqualis D C, Quod esse non potest.

Circulorum verò sese extrinsecùs tangentium satis constat diuersa esse Centra: quum Centrum sit in medio sui Circuli.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VII.

Si in Diametro Circuli punctum signetur aliud à Centro, & ab ipso ad peripheriam plures educātur lineæ: maxima erit in qua Centrum, minima verò quæ Diametrum perficit. Sed quæ Centro propiores sunt, cæteris longiores. Duæ autem duntaxat rectæ lineæ æquales ab ipso puncto ad peripheriam exibunt.

Sit Circulus A B C D, cuius Centrum E, Diameter verò A E D: in qua signetur punctum F inter E & D. Et ab ipso F educantur lineæ F B, F C, & F G. Dico F A esse maximam linearum, minimam verò F D: Aliarū autem, F B ipsa F C maiorem: & F C ipsa F G. Dico etiam duas tantùm lineas rectas æquales educi posse vtrinque ab F puncto ad peripheriam.



Connectātur enim E B, E C, & E G. Et quoniā duo latera F E & E B, Trianguli B E F, sunt, per vigesimā Primi, maiora tertio F B: erit & F A maior F B: quum F A sit æqualis duabus F E & E B. Rursus quum duo latera E B & E F, Trianguli B E F, sint æqualia duobus E F & E C, Trianguli C E F: angulus autem B E F maior angulo C E F: erit & basis F B, per vigesimamquartam Primi, maior basi F C: Atque eadem ratione F C maior quàm F G. Quoniam rursus duæ E F & F G, per vigesimam Primi,

maiores

maiores sunt quàm E G: erunt & maiores quàm E D: quum E G & E D sint æquales. Communi itaque ablata E F, supererit F G maior F D. Maxima igitur est F A, minima verò F D. Maior autem F B quàm F C: & F C quàm F G, Quod est prius.

Constituatur porrò angulus F E H, per vigesimamtertiam Primi: æqualis angulo F E G: & connectatur F H. Quumq; E F & E G sint æquales duabus E F & E H: erit, per quartam Primi, basis F G basi F H æqualis.

Ac iam probabitur ab ipso F puncto, aliam lineam quàm F H, ad peripheriam educi non posse, æqualẽ ipsi F G. Nam si possit, ducatur F K. Quumq; F H sit æqualis F G, erit & ipsa F H ipsi F K æqualis, repugnante prima parte huius Propositionis: quum sit F K propior Centro. Duæ igitur duntaxat F G & F H sunt æquales.

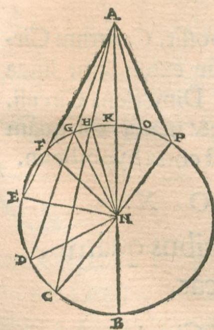
VEL sic. Connectatur E K. Et quoniam æqualis est E G ipsi E K, communis autem E F: & basis F G basi F K æqualis: erit, per octauam Primi, angulus F E G æqualis angulo F E K. At angulus F E H positus est æqualis angulo F E G. Erit igitur angulus F E K æqualis angulo F E H, minor maiori, quod est absurdum.

Hinc manifestum est, duas lineas ab aliquo puncto Diametri hinc inde exeuntes, si æquales angulos cum Diametro fecerint, æquales esse. Quales hoc loco sunt duæ F G & F H lineæ.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VIII.

Si à puncto extra Circulum signato lineæ exeuntes, Circulum secent: maxima est quæ per Centrum transit: Aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto maior. Partium verò ipsarum quæ extrinsecùs in peripheriam cadunt, minima est quæ in continuum est Diametri: aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto minor. Et duæ duntaxat rectę lineę æquales ab ipso puncto in peripheriam cadunt.

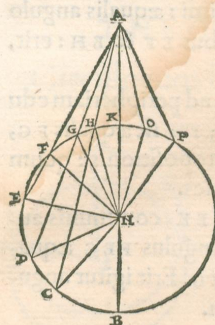
A puncto A signato extra Circulum B C D B, cuius Centrum N, ducantur plures lineæ secantes Circulum: sintq; A K N B, A H C, A G D, & A F E. Dico A B per Centrum eductam, omnium esse longissimam: & A C maiorem A D, & A D maiorem A E. Earum verò quæ extrinsecùs sunt partium, minimam esse A K, & A H minorem A G, & A G minorem A F. Dico prætereà duas tantùm rectas lineas æquales à puncto A in peripheriam cadere posse.



Connectantur N C, N D, N E, N F, N G, & N H. Eademq; erit argumentandi ratio quæ in antecedente. Nam in Triangulo A C N, duo latera A N & N C (quibus est æqualis A B) sunt maiora A C, per vigesimam Primi: Quapropter & A B maior A C. Rursus quum angulus A N C, maior sit angulo A N D: erit A C maior A D, per vigesimamquartam eiusdem: ob idq; A D maior A E. Et quoniam N K est æqualis N H: sed N H & H A maiores N A: ablatis æqualibus N H & N K, supererit A H maior A K. Et quoniam angulus A N G, maior est angulo A N H: erit basis A G maior basi A H: ob idq;, A F maior A G. Maxima igitur est A B earum quæ per Circulum educuntur. Maior autem A C quàm ipsa D: & A D maior quàm A E. Minima porrò exteriorum est A K: & minor A H quàm A G, & A G minor quàm A F, Quod est prius.

Iam verò constituatur, per vigesimamtertiam Primi, angulus A N O æqualis angulo A N H. Eritq; duorum Triangulorum A N H & A N O, basis A H æqualis basi A O, per quartam

quartam Primi. Neque erit alia ipsi AH æqualis. Nam si ponatur AP: erit & ipsa AP, per communem Notionem, æqualis AO, Quod iam probauimus fieri non posse: quum sit AO ipsi AK propior.



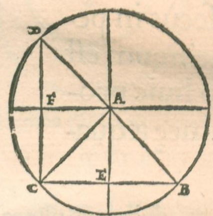
VEL sic. Quoniam angulus ANP, maior est angulo ANH (est enim ANO ipsi ANH æqualis): erit quoque basis AP, maior basi AH, per vigesimamquartam Primi. Non igitur æqualis. Quare duæ tantùm lineæ rectæ æquales vtrinque à puncto A in peripheriam cadunt, Quod erat demonstrandum.

NEMO autem offendatur, quòd hîc lineas quæ extrinsecùs aduenientes Circulum penetrant, secare Circulum dixerimus. Nam tametsi propriè sola KB Circulum secet: tamen AB sic secare Circulum dicitur, vt quæuis linea lineam alteram. Atque vt linea NB peripheriam secat vnico sui puncto, nempè puncto B: ita AB Circulum secat, ea sui parte quæ est KB. Facessat igitur calumnia. Nos enim Geometriam exquisitè quidem, sed non nimis anxiè tractamus. Sed quę abundant, quantùm possumus, resecamus: atque ad breuitatem veritati amicam contrahimus.

THEOREMA 8, PROPOSITIO IX.

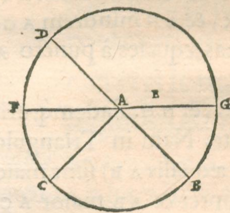
Si à puncto intra Circulum signato, plures quàm duæ æquales rectæ lineæ ad peripheriam ductæ fuerint: punctum illud erit Circuli Centrum.

Sit punctum A, signatum in Circulo BCD: sintq́; tres rectæ lineæ AB, AC, & AD, ad peripheriam eductæ, æquales. Dico punctum A esse Centrum Circuli.



Connectam enim BC & CD: Quarum vtranque diuidam æqualiter: illam quidem in puncto E, hanc verò in puncto F. Et ducam AE & AF: quas vtrinque producam ad peripheriam Circuli.

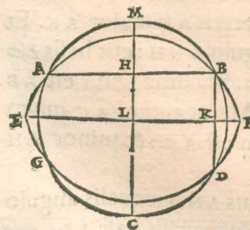
Eritq́; Triangulorum ABE & ACE, vterque angulus qui ad E, æqualis: ob id, vterque rectus. Eadem ratione vterque angulorum qui ad F, rectus. Et quia AE diuidit BC per medium: & AF itidem DC per medium: vtraque ipsarum transit per Centrum, ex Consectario primæ huius. Quare quum vtraque occurrat alteri in puncto A: erit ipsum A Centrum Circuli, Quod erat probandum.



ALITER ab impossibili. Sit E, si possit, Centrum Circuli: ex quo per punctum A, vtrinque extendatur linea ad puncta F & G peripheriæ: vt sit FG Dimetiens Circuli. Eritq́;, per septimā huius, AG maxima: & maior AB quàm AC, quū sit propior Centro E, Quod est cōtra hypothesin.

THEOREMA 9, PROPOSITIO X.

Circulus Circulum in pluribus quàm duobus punctis non secat.

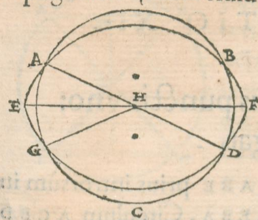


Secet, si fieri possit, Circulus ABC, Circulum DBF in pluribus quàm duobus punctis, vt in A, B, D, & G. Et coniunctæ AB & BD, secentur æqualiter in H & K. A quibus H & K punctis, excitentur perpendiculares HC & KE: quæ extendantur vtrinque ad E, F, C, & M, puncta peripheriæ

DEF:

DEF: ſecentq; inter ſe in L puncto.

Et erit, per Conſectarium Primæ huius, punctum L Centrum vtriuſque Circuli, repugnante quinta eiuſdem.

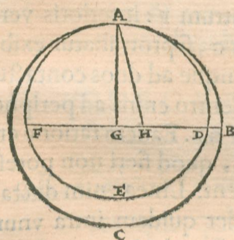


ALITER. Secent ſe, vt prius, duo Circuli in punctis A, B, D, G. Et, per primam huius, ponatur H Centrum Circuli ABC. Et connectantur tres HA, HD, & HG: quæ ex definitione Centri & Circuli, erũt æquales. Et quia exeũt ad peripheriam vtriuſque Circuli, nempè ad ſectionem ipſorum: erit & H per antecedentem, Centrum Circuli DEF, contra quintam Propoſitionem eiuſdem.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XI.

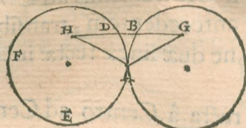
Si Circulus Circulum, ſiue introrsùm, ſiue extrinſecùs tangat: per Centra vtriuſque ducta linea, in contactum ipſorum cadit.

Duo enim Circuli ABC & DEF ſeſe tangant introrsùm in puncto A. Dico lineam eductam per eorum Centra, cadere in A punctum.



Sin minus, cadat aliorsùm: ſitq; G Centrum Circuli ABC, ex prima huius: & H Centrum Circuli DEF. Tum per G & H ducatur linea GB, ſecans peripheriam interioris Circuli in puncto D: exterioris verò in B. Et ducantur GA & HA, Et quia, per vigeſimam Primi, GH & HA maiores ſunt GA: erunt & maiores GB. Communi igitur ablata GH, erit HA maior HB. Sed HD æqualis eſt ipſi HA: vtraque enim è Centro. Maior igitur eſt HD quàm HB, pars toto.

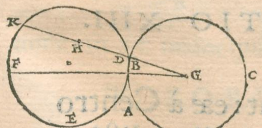
ALITER, Producatur DH ad punctum F peripheriæ DEF. Et quia G eſt extra Centrum H in Diametro Circuli DEF: maior erit GD quàm GA, per ſeptimam huius. At GB eſt æqualis GA. Maior igitur GD quàm GB, pars toto.



Iam verò ſi duo Circuli ſe extrinſecùs tetigerint: ducatur, vt prius, linea GH per Centra iam poſita G & H, ſecans ambas peripherias in duobus punctis B & D: Et connectantur GA & HA.

Eruntq;, per vigeſimam Primi, duæ GA & HA maiores GH. Quapropter & duæ GB & HD maiores GH, Quod eſt falſum.

ALITER. Sint duo Circuli ABC & DEF ſeſe extrinſecùs tangentes in puncto A: ſitq; Circuli ABC, Centrum G, vt priùs: A quo per contactum Circulorum producatur GA linea, ad punctum F peripheriæ DEF. Quæ quia negatur tranſire per Centrum ipſius DEF Circuli: ducatur ab eodem Centro G, altera linea GK: quę tranſeat, ſi fieri poſſit, per Centrum H ipſius DEF: ſecans peripheriam ABC in puncto B, & DEF in puncto D: partemq; ipſius oppoſitam in puncto K. Et quia à puncto G extra Circulum DEF ſignato, ducitur linea GK, tranſiens per Centrum H: & altera non per Centrum tranſiens, GF: minor erit pars illius exterior GD, parte huius exteriori GA: per octauam huius. Sed GA eſt æqualis GB. Minor igitur erit GD ipſa GB, totum parte, Quod eſt abſurdum.



HANC poſteriorem partem probauimus ex octaua huius, ſicut priorem ex ſeptima: & ſanè commodiùs. Prior enim figuratio & ſi ex arte ſit, tamen non facilè accipitur: Neutrum enim Centrorum in ſuo loco conſiſtit.

Cæterùm

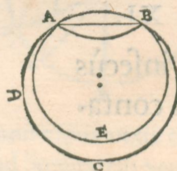
Cæterùm ex his duabus Theonis, vnam fecimus: quòd tam ſint hæc duo capita coniuncta, quàm duo ſequentia.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XII.

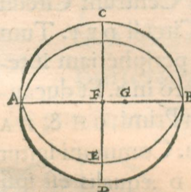
Theoni 13.

Circulus Circulum non tangit in pluribus punctis vno: & ſi introrsùm, & ſi extrinſecus tangat.

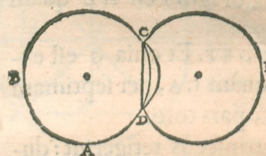
Nam, ſi fieri poſſit, tangat Circulus A B C D, Circulum A B E prius introrsùm in duobus punctis A & B: pòſt extrinſecùs, tangat Circulus A E B A, Circulum A C B D in duobus A & B punctis.



Quum itaque in priori constructione duxerimus lineam rectam ab A ad B, ſi ipſa ceciderit extra Circulum A B E interiorem: id erit contra doctrinam ſecundæ huius. Si verò cadat intra ambos: quum diuiſerimus ipſam æqualiter, vt in F, & eduxerimus perpendicularem tranſeuntem per F ad vtranque peripheriam: ipſa tranſibit per vtriuſque Centrum, ex Conſectario primæ huius: repugnante ſexta eiuſdem: immò & antecedente: quum non cadat in contactum ipſorum.

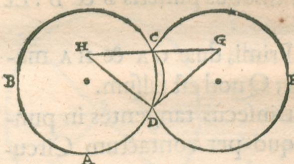


V E L ſic. Sit exterioris Circuli Centrum F: interioris verò Centrum G. Et linea applicata ex F in G, ſi protrahatur, exibit per priorem partem antecedentis, vtrinque ad duos contactus A & B. Eritq; F A æqualis ipſi F B: è Centro enim ad peripheriam: Quapropter maior erit F A quàm G B. Eadem ratione erit G B æqualis G A. Quare F A maior G A, quod fieri non poteſt.



S E D nec extrinſecùs ſeſe contingent. Linea enim ducta à puncto C ad punctum D, cadet quidem intra vnum Circulorum, ſed extra alterum, Quod eſt contra ſecundam huius.

A L I T E R. Si ſeſe contingant in duobus punctis, vt in C & D: ducatur linea recta à Centro vnius ad Centrum alterius. Atque hæc, per antecedentem, tranſibit per punctum C & per punctum D. Quod fieri non poteſt, ne duæ lineæ rectæ includant ſuperficiem.



Poteſt etiam duci linea recta à Centro ad Centrum: Quæ tranſibit, verbi gratia, per C, alterum contactuum: ex antecedente. Ac tum connexis G D & H D, fiet Triangulũ, cuius duo latera G D & H D non erunt maiora latere G C H, contra vigeſimam Primi.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Theoni 14.

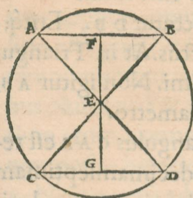
In Circulo, ſi rectæ lineæ æquales fuerint: eæ à Centro æqualiter diſtabunt. Et ſi à Centro æqualiter diſtiterint: ipſæ erunt æquales.

In Circulo eſſe rectæ lineæ dicuntur, quæ ad Peripheriam vtrinque terminantur.

Sint in Circulo A B C D, cuius Centrum E, duæ lineæ A B & C D æquales. Dico ipſas à Centro æqualiter diſtare: Et contrà, ſi à Centro æqualiter diſtent, ipſas eſſe æquales.

Ducam à Centro lineas E F & E G, perpendiculares ad A B & C D. Eritq;, per ſecundam

cundam partem tertiæ huius, A B æqualiter diuisa in F : & C D æqualiter in G puncto.



Connectam postmodùm E A, E B, E C, & E D. Et quoniam duo latera A B & A E, Trianguli A E B, sunt æqualia duobus lateribus C D & C E, Trianguli C E D, & basis E B, basi E D: erit, per octauam Primi, angulus B æqualis angulo C: Quum itaque duo latera A E & A F, Trianguli A E F, sint æqualia duobus lateribus C E & C G, Trianguli C E G: erit, per quartam Primi, basis E F, basi E G æqualis: Quæ quum sint perpendiculares, erunt A B & C D æqualiter distantes à Centro, per quartam Definitionem huius.

ALITER. Quadratum ipsius A E est æquale Quadratis duarum A F & E F, per quadragesimamseptimam Primi: Et Quadratum E C, per eandem, æquale Quadratis C G & E G. Atqui Quadratum A E est æquale Quadrato E C. Erunt igitur Quadrata duarum A F & E F æqualia Quadratis duarum E C & E G. Demptis itaque æqualibus A F & C G, supererunt duo Quadrata E F & E G æqualia. Quapropter ipsæ E F & E G lineæ, sunt æquales: ob idq́;, A B & C D, per Definitionem, æqualiter distant à Centro, Quod est prius.

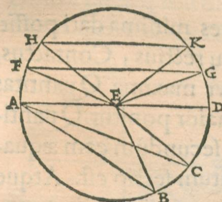
Iam consequitur, si A B & C D æqualiter distant à Centro, ipsas esse æquales. Nam quum Quadrata duarum E F & F G sint æqualia: ipsis ablatis, supererunt Quadrata duarum A F & C G æqualia: ob id, & ipsæ æquales. Erunt igitur A B & C D æquales, quum earum dimidia sint æqualia, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XIIII.
Theoni 15.

In Circulo, maxima linearum est Diameter: Aliarum verò vnaquæque quanto propior Centro, tanto maior.

In Circulo A B C D, cuius Centrum E, sint plures lineæ A B, A C, A D, F G, & H K: quarum A D sit Diameter Circuli. Hanc dico esse omnium longissimam: Alias verò singulas quanto propiores Centro, tanto singulis esse maiores.

Cum Centro connectantur extremitates omnium, ductis E B, E C, E G, E K, E H, & E F. Eruntq́;, per vigesimam Primi, duo latera E F & E G, Trianguli E F G, maiora tertio F G: Quæ quum sint æqualia ipsi A D: erit A D maior F G. Eademq́; ratione, maior quàm vnaquæque reliquarum, si ipsæ ponantur bases Triangulorum: quum bina quæque latera è Centro exeuntia, sint ipsi A D æqualia, Quod est prius. Porrò quum duo latera E F & E G, Trianguli E F G, sint æqualia duobus E H & E K, Trianguli E H K: & angulus F E G maior angulo H E K: erit, per vigesimamquartam Primi, basis F G maior basi H K. Haud dissimili ratione erit A C maior quàm A B. Sicq́; patet tota Propositio.

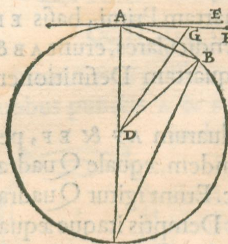


THEOREMA 14, PROPOSITIO XV.
Theoni 16.

Quæ ab extrema Circuli Diametro perpendicularis ducitur linea, extra Circulum cadit: Neque inter ipsam & peripheriam altera recta linea capi potest. Et Semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

Sit Circulus A B C, cuius Centrum D, Diameter verò A C: per cuius extremitatem A, ducatur linea perpendicularis, vt A E. Dico ipsam cadere extra Circulum.

Sin minus, cadat perpendicularis intra: & sit illa A B: Et connectatur D B. Eritq́; per quintã Primi, angulus D A B æqualis angulo D B A: ob idq́;, rectus. At in Triangulo, duo anguli recti esse non possunt, per decimamseptimam Primi. Non igitur A B, neque alia intra Circulum, perpendicularis erit super extrema Diametro.



Vel sic. Connectatur C B. Et quia angulus C A B est rectus: ipse erit maior angulo A B C, per decimamseptimam Primi. Atque ob id, erit latus C B maius latere A C, per decimamnonam eiusdem, contra antecedentem. Cadet ergo perpendicularis extra Circulum, qualis est A E, Quod est primum.

Dico insuper, inter A E & peripheriam, non capi alteram lineam rectam. Quæ si possit, ipsa sit A F: ad quam ducatur perpendicularis D G: vt sit D G A angulus rectus. Eritq́;, per decimamnonam Primi, latus D A maius latere D G, Quod est falsum. Quare inter A E & peripheriam nulla linea recta intercipitur, Quod est secundum.

Postremò, Dico angulum C A B, qui fit à Diametro C A & Semicirculo A B C, maiorem esse omni angulo acuto rectilineo: & E A B eodem minorem. Est enim C A E rectus: ob id, omni acuto maior: constatq́; duobus E A B & C A B mixtis angulis. At verò inter E A & B A, nulla recta linea capi potest, vt modò probauimus. Quapropter quum E A B diuidi nequeat per lineam rectam, erit minima pars quæ à recto possit auferri, & C A B maxima. Omnis enim angulus Rectilineus per æqualia diuiditur, ex nona Primi. Ac sic constat tota Propositio.

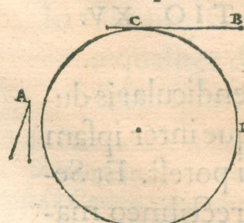
Consectarium.

Recta linea ab extremitate Diametri perpendicularis, Circulum tangit: idq́; in vno puncto.

Nam si in duobus punctis tangat, ipsa intra Circulum cadet, per secundam huius, Quod modò improbauimus.

Qvvm verò huius Theorematis caput postremum attentiùs cõsiderarem, mihi sanè in mentem subiit prima specie, Geometriam non satis sibi constare: immò adeò, repugnantiam in se admittere.

Primùm enim extra intelligentiam est, vt inter Quantitates minima dari possit: qualem hoc loco angulum, quem dicunt, Contingentiæ, seu rectiùs, Contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima Quantitas detur: qualis hîc angulus Semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine Quantitas est, quòd partibus constet: & secundùm eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam Continuæ in infinitum sectio est. Atque adeò quum in primam Propositionem Decimi incidissem, tum magis anxiè expendere cœpi quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima Decimi.



Si à maiori duarum Quantitatũ auferatur maius quàm dimidium, ac rursus ex reliquo maius quàm dimidium, idq́ continuò fiat: relinquetur tandem magnitudo, minor magnitudine minore posita.

Verbi caussa, Sint duo anguli, A quidem rectilineus, & B C D angulus (si modò sit angulus) contactus: Vult Prima Decimi: vt, si auferatur ab angulo A, maius quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte

parte maius quàm dimidium : ſicq; continuò ex reſiduis partibus maius quàm dimidium : tandem relinquatur minor angulus quàm B C D. Cuius demonſtrationem hîc non appono, quum ex ſequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria Propoſitio eſt, quæ (vt ſic dicam) magis naturaliter vera ſit. Quod ex Numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propoſitis duobus Numeris 8 & 2, quum ab octonario maius quàm dimidium abſtuleris, vt quinarium : tum à ternario reſiduo, maius quàm dimidium, vt binarium : relinqui vnitatem, poſito binario minorem?

Neque verò ad rem facit quod Campanus illîc excipit, Propoſitionis ſententiam de quantitatibus eiuſdem generis eſſe intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla eſt : quinetiam menti Euclidis contraria, vt nos quum illûc ventum erit, manifeſtum faciemus. Immò & ipſe Campanus ſecum pugnat, quum in ſecunda Duodecimi demonſtranda, aliiſq; Propoſitionibus nonnullis Solidorũ, ipſe à Curuo Rectum aufert.

NOS igitur hanc dubitationem ſic expediemus : vt dicamus lineam rectam quæ Circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere : ſcilicet B C D nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque, vt vno verbo dicam, In Decuſſatione (Decuſſationẽ hoc loco & Sectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur.

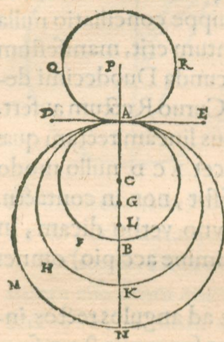
Duabus enim lineis A B & C D ſe ſcindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E fixo: vt ex C D fiat F G : hinc ſanè ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F : inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Quumq; facta fuerit H K : hinc quidem angulus obtuſior fiet H E A, inde verò acutior K E A : ſicq; continuò, donec peruenerit ad A B, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immerſa, vt ſic dicam, linea C D in lineam A B, euaneſcet angulus.

Neque diuerſa ratio eſt in Curuo. Sit enim in Circulo A B C A, cuius Centrum D, linea D E præteriens peripheriam, & ſecans ipſam in A puncto fixo. Super quod circũducatur ipſa D E per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuò varii cum peripheria in ipſo puncto A : donec ceſſante decuſſatione, linea E D facta ſit E K, & tangat Circulum. Ac tum linea D E non iam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam B A C, quantùm ad angulum attinet : non aliter quàm ſi B A C eſſet linea recta. Neq; contrà facit, quòd diducantur lineæ, faciantq; ſpatium C A K. Nam id ſola A C linea efficit, quæ rectam refugit : ſed eam tamen in puncto A amplectitur. Quum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat quàm vno: fit vt punctum A tam ſit ineptũ angulo conſtituendo, quàm modò erat punctum ſectionis E, linearum rectarũ. Fortaſsè dices punctum A lineæ rectę manere in ſuo recto: punctumq; A peripheriæ, in ſuo rotundo: neque vtrunque eſſe idem punctum : ſed lineas ſe tantùm inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitùs omniq; puncto refugit : vt contraria contrapoſita fiant manifeſtiora. Id verò ſenſus nõ recipit. duo enim Circuli ſeſe exteriùs tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerẽt : ſcilicet, ſi intelligeremus Circulum qui in puncto A tangeret ipſum A B C Circulum exteriùs : quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe : vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minimè vrgebit. Immò tantò minus contactus linearum erit angulus. Habebit enim vtrinque ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per Theoremata.

Contactus duorum Circulorum interior, Quantitas non eſt.

Sit enim Circulus A F B A, cuius Centrum C, Diameter verò A B: per cuius extremitatem A, ducatur linea D E ad angulos rectos. Et constat, ex Consectario huius Decimæquintæ, lineam D E contingere ipsum A F B A Circulum: ac propterea D A F esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce Decimæquintæ. Iam verò inter puncta C & B, suscipiatur in Diametto A B, Centrum G: & spatio G A, describatur alter maior Circulus A H K A. Dico F A H non esse quantitatem.

Constat quippè Circulum A H K A transire inter rectam D A & curuam A F: quum sit Semidiameter G A, maior Semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E tangere ipsum A H K A Circulum, ex eodem huiusce Decimæquintæ Consectario: ac propterea D A H esse omni acuto minorem. Describatur tertiò, secundùm maius spatium L A, Circulus A M N A. Et erit, ex eodem Consectario, D A M omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus quos efficiet linea D E cum Circulis ductis per A punctum, quorum Centra in A B linea, minores omni acuto Rectilineo: ac sic omnes æquales (si modò æqualitas inter non quanta dici possit). Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: fietq; vt M A F, contactus interior Circulorum, neque augeat neque minuat contactum D A M. Igitur M A F quantitas non est, Quod erat demonstrandum.



SED & probabimus contactum interiorem Circulorum, quantitatem non esse, in hunc modum.

Nempè quum omnes Circuli sint Similes, erunt & Semicirculi Similes: Quapropter anguli qui fiunt à Diametro & peripheria, in omnibus Circulis sunt æquales: per Conuersam Definitionis Similium Sectionum: (nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti). Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H & N A M: Ac propterea contactus F A M nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M quantitas non est, Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterũ,

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, Quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si D A F sit quantitas: ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius Decimæquintæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: esset enim F A M pars ipsius D A F. Atqui F A M quantitas non est, vt modò probauimus. Non est igitur F A M pars ipsius D A F. Igitur D A F neque per lineam rectam neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F quantitas non est, Quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactus duorum Circulorum exterior, Quantitas non est.

In eadem constructione, protrahatur B A Diameter ad punctum P. Tum Centro P, interuallo autem P A, describatur Circulus A Q R A, tangens Circulum A B F A exteriùs in puncto A. Dico contactum B A Q non esse quantitatem.

Id verò manifestum est ex posteriori Demonstratione. Nam neq; per lineam obliquam diuiditur: quum F A M non sit quantitas, per primam harum: neque per rectam, quum neque D A F sit quantitas, per secundam earundem: neque D A Q quantitas, per eandem. Quare quum F A Q partes nullas habeat, quantitas non erit, Quod erat probandum.

Ex his emerget hoc Pronuntiatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit,

Anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, siue intra siue extra Circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in

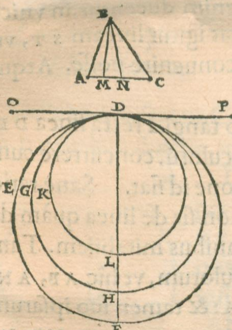
Vt in posteriore Figura, angulus BAF æqualis est angulo BAD: quum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id, QAP rectus est, & æqualis ipsi DAP, quum DAQ nihil addat, Quod erat probandum.

Atque vt rationes quoque philosophicas (immò quæ Philosophiæ pars in Geometria non latet?) Geometricis speculationibus immisceamus: Circulus ipse omnia in se recipit, ob sui perfectionẽ. Quumq; sit omni ex parte absolutissimus, indignum sanè est vt ipsum Recti minimè capacem esse putemus. Vt verissimè Plato lineam quæ Circulum constituit, rectam esse dixerit, non secus quàm eam quæ à puncto in punctum breuissimè extenditur: etsi illam, distinctionis gratia, obliquam vocemus.

HIS AD hunc modum demonstratis, facessent à Geometria Paralogismi, qualis imprimis ille est peruulgatus, quem hùc affert Campanus. Datur, inquit, angulus maior angulo BAF, & minor eodem: neque tamen datur eidem æqualis. Id verò ex superioribus refellitur: Nihil enim maius neque minus eo quod quantum non est, dici debet. In Numeris quidem id accidit. Datur enim maior Numerus quàm ℞ç 8 vt 3: & datur minor eodem, vt 2: neque tamen æqualis eidem, Sed quantitatis Continuæ, quàm Discretæ, longè alia est natura. Continuorum enim in infinitum sectio est: Discretorum non item: Quod & ratio vocabulorum indicat. Nam in Continuis nihil vacat, nihilq; intermittitur. In Discretis verò omnia nominatim deducta sunt. Vt, verbi gratia, bis quatuor seu octo, Arithmeticè quidem in Quadratum euadere non possunt: Geometricè verò maximè. Nos autem ex hac Demonstratione quàm latum ad Geometriæ abdita peruestiganda patefecerimus campum, aliquando, Deo iuuante, notum faciemus in proprio libello de Quadrato & Circulo: & dubitationes quæ huc contrà adduci possunt, diluemus.

Dissoluetur & ille Paralogismus à Cardano propositus libro subtiliũ decimosexto. Aliqua quantitas, inquit, potest continuè, atque adeò infinitè augeri, altera verò infinitè minui: Et tamen augmentum illius, quantuncunque euadat, minus semper erit decremento huius.

Verbi causa, Sumatur angulus rectilineus ABC: & describantur duo Circuli DEFD & DGHD, sese intrinsecùs tangentes in puncto D: quorum Centra erunt in vna Diametro DF. Tum angulus EDG Circularis, poterit infinitè augeri: ducendo scilicet Circulos cõtinuè minores per punctum contactus D, quorum Centra sint in DF Diametro. At angulus ABC rectilineus poterit infinitè minui, per diuisiones quales docet nona Primi: vt hìc in ABN, post in ABM (atque hæc binaria diuisio satis sit). Et tamẽ angulus Circularis, augendo nunquàm euadet æqualis angulo rectilineo decrescenti: vt hìc angulus EDK, minor omninò est angulo ABM: Et si plures ducerentur Circuli, etiam infiniti: nunquàm fieret angulus contactus tam magnus quàm angulus ABM, immò quàm eius pars millesima. Quod patet, inquit, ducta linea OP contingente. Angulus enim ODK minor est omni angulo acuto rectilineo: quare EDK multo minor erit.



Hactenus ex illius sententia.

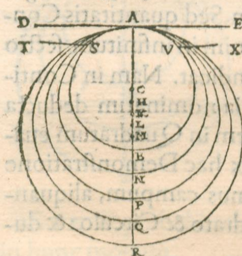
Cui sic respondemus, ABC quidem angulum infinitè minui posse: sed EDG augeri posse, id verò inficiamur. Demonstrauimus enim EDK non esse maius EDG. Atque hæc minimè cohærent, ODG æquale esse ipsi ODK, sicut & ipse ibidem astruit: & EDK maius esse EDG. Nam si ODG æquale est ODK: nihil vtiq; addit EDK ad ODG: ob id, neque ad EDG. Quare GDK, immò EDK maius esse non potest quàm EDG. Sicq; euertitur fallacia.

Proponit ibidem Cardanus ex Apollonio & Rabi Mose, de duabus lineis in eodem plano existentibus, quæ protractæ ad angulum tendere videntur, propioresq; inter se semper fiunt: Et tamen magno, vt ipse putat, miraculo, nunquàm concur-

runt: etiamsi in infinitum protrahantur. Quod etiam obiter adnotauerat Georgius Valla ex Gemino, Libro primo suæ Geometriæ, Cap. LIX. Et post hunc Cælius Calcagninus, ad Iacobum Zieglerum scribens, ex cuiusdam obseruatione cuius nomen reticet. Hunc autem paralogismum suo loco dissoluemus.

Sed quur inuentum nostrum differemus? quum iam nunc in præsentia quod pollicemur magna ex parte præstare possimus? Nos enim, vt maximè conticendum aliquid duceremus, alia certè habemus solidiora & vtiliora: (nisi quòd captiosas Propositiones refellere, non paruam habet vtilitatem) quæ in id tempus seruabimus, dum integrum Euclidem offeramus.

Sit itaq; Circulus A B A, cuius Centrum C, & Diameter A B: Sitq; linea recta D E, Circulum tangens in A puncto. Tum inter duo puncta C & B, Diametri, suscipiantur plura Centra (ac nunc quatuor suscepisse satis sit) H, K, L, M: super quibus describantur quatuor Circuli, A N A, A P A, A Q A, & A R A, transeuntes inter D E rectam & A B A peripheriam, seq; inter se tangentes interiùs in A puncto.



Et manifestum est, horum quatuor Circulorum peripherias paulatim &, vt nouè loquar, punctuatim propiores fieri ipsi rectæ D E. Sumatur igitur punctum S in peripheria A N, proximè A punctum. Pòst in peripheria A P ponatur aliud punctum, quod propiùs accedat ad ipsam D E quàm punctum S: quod quoniam sua nota commodè signari non potest, vocetur punctum secundum. Sit deinde in peripheria A Q, aliud punctum, quod propius sit ipsimet D E, quàm punctum secundum: dicaturq; punctum tertium. Demùm in peripheria A R, sit punctum propiùs accedens ad eandem D E quàm tertium: atq; hoc nominetur punctum quartum. Sicq; continuè, si intelligantur Circuli duci per contactum A, prioribus maiores, quorum Centra in A B linea: eorumq; puncta singillatim propiora lineæ D E. Tandem per hæc puncta, nempe primum, secundum, tertium, & quartum, & si qua essent plura, ducatur linea S T. Quam manifestum est paulatim semper accedere ad D E, non secùs quàm Circulorum puncta per quæ ipsa educitur: & tamen nunquàm coniungi posse cum ipsa D E: etiam si lineæ infinitè protrahantur, scilicet si infiniti ducantur Circuli. Quotquot enim ducentur, in vnico puncto A tangent lineam D E: ex hac Decimaquinta. Constat igitur lineam S T, vtcunque accedat ad lineam D E, cum ea tamen nunquam conuenire posse. Atque hoc idem intelligi volo in alteram partem de linea V X.

At dices, Video quidem Circulos omnes vnico sui puncto tangi à recta linea D E: ac propterea lineam S T infinitè protractam per puncta Circulorũ, concurrere cum D E non posse. Sed tamen mirari non desino qua'nam ratione id fiat. Sanè ratio Geometrica admirationem tollit: facitq;, vt magis mirum non sit de linea quàm de Circulis ipsis. Totum igitur ad Circulum refertur, modis omnibus mirabilem. Tam enim mirum videri debet propiùs intuenti, peripherias Circulorum, vt hîc A B, A N, A Q, & A R, semper remoueri, longiusq; discedere à puncto A: & tamen suo ipsarum ductu in ipsum A redire: quàm lineam S T ad rectam A D semper accedere, eam tamen nunquàm attingere. Ob id mixta linea dici debet ex recto & Circulari: ac propterea inter vtrunque perpetuò consistit. Desinet igitur mirari, qui Circuli formam, rationem, naturam, & constructionem perpenderit. Atque eiusmodi Lineæ constant infinitis lineis in se quodammodo recuruis seu refractis. Sed quum Circuli per A ducti, omninò contigui propter infinitatem intelligantur: hoc loco S T vix aliter sensui quàm pro vnica linea obijcitur. Neque dubium est quin ipsa ex earum sit genere quas ex Apollonio proponunt (ac tale est in Solidis latus Hyperboles, vt illîc docebimus): at certè nullo modo recta, quod putabat Calcagninus: sed linea quædam anormis, cuius non sit mirum neutram esse naturam. Verùm nos hæc ad Corporum materiam reponimus, vt ad Circulos reuertamur.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XVI.
Theoni 17.

A puncto extra Circulum signato, lineam ad Circuli contactum ducere.

Sit punctum A extra Circulum B C D, cuius Centrum E, volo à puncto A, ad Circulum B C D, lineam contingentem ducere.

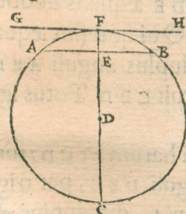
Ab ipso E Centro ad punctum A, duco rectam E A, secantem Circulum in puncto D. Tum super eodem Centro E, secundùm interuallum E A, describo Circulum A F G. Et à puncto sectionis D, excito D F perpendicularem, quę secet Circulum exteriorem in F. Et connecto E F, secantem Circulum interiorem in B. Ac postremò connecto A B. Dico A B esse quæ contingit Circulum B C D.

Sumptis enim duobus Triangulis A E B & F E D, erunt duo latera A E & E B illius, æqualia duobus F E & E D huius: & angulus E vtrique communis. Basis igitur A B, per quartam Primi, basi F D æqualis: & angulus E B A, angulo E D F. Sed angulus E D F rectus: quapropter & E B A rectus. Quare, per Consectarium antecedentis, A B linea contingit B C D Circulum, Quod erat demonstrandum.

SIC quoque demonstrabimus, exercitationis gratia. Ducta linea A E, inuestigo quantùm possit A E suprà E D: per ea quæ demonstrauimus ad quadragesimamseptimam Primi: & sit linea F G, potentia A E supra E D. Iam verò ex A E linea data, & ex duabus quæ sint ipsis E D & F G datis æquales, conficio Triangulum A B E per vigesimamsecundam Primi. Et E B omninò desinet in peripheriam, ex definitione Centri: Eritq; angulus A B E rectus per vltimam Primi. Quare A B continget Circulum: per Consectarium antecedentis, Quod erat probandum.

Lineæ rectæ quæ Circulum secet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelum ducere.

Sit linea A B, secans Circulum A B C, cuius Centrum D, in punctis A & B. Volo ipsi A B parallelum ducere, quæ tangat Circulum.

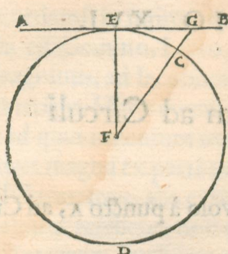


Diuido A B bipartitò in puncto E. Tum per E punctum & per Centrum D, duco Diametrum C D E F. Duco postmodùm G F H lineam ad angulos rectos ipsi C F Diametro. Dico G F H, quæ, per Consectarium decimæquintæ, tangit Circulum, esse ipsi A B parallelum.

Nam quum recta C F in vtranq; cadens, faciat omnes angulos qui ad E rectos, per tertiam huius: sintq; duo anguli qui ad F positi recti: erunt A B & G H paralleli, per vigesimamnonam Primi, Quod erat demõstrandum. Hæc ad Figuras Circulis inscribendas percommoda.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XVII.
Theoni 18.

Si recta linea Circulum tangat: à Centro ad contactum ducta recta linea, erit tangenti perpendicularis.



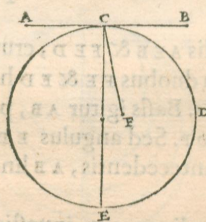
Sit linea A B, tangens Circulum C E D, cuius Centrum F, in puncto E. Et à Centro F ducatur linea F E. Hanc dico esse perpendicularem ad A B.

Quæ si non fuerit: sit F G ad A B perpendicularis, secans peripheriam in C. Quumq; angulus E G F sit rectus: erit in Triangulo E F G, latus E F maius latere F G, per Decimamnonam Primi: Quod est falsum, quum sit F C ipsi F E æqualis. Probatur hæc à negatione, in modum Conuersarum. Est enim Conuersa Consectarij Decimæquintæ huius.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Si Circulum recta linea tangat: à contactu perpendicularis deducta, per Centrum transit.



Sit linea A B tangens Circulum C D E A in puncto C: A quo demittatur C E perpendicularis ipsi A B, ad punctum E peripheriæ. Dico C E transire per Centrum.

Sin aliter: sit Centrum extra ipsam C E, vt in F puncto: A quo ad punctum C, ducatur F C: quæ, per antecedentem, erit perpendicularis ad A B: ob id, angulus A C F æqualis angulo A C E, pars toti, Quod est absurdum.

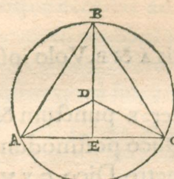
THEOREMA 17, PROPOSITIO XIX.

Theoni 20.

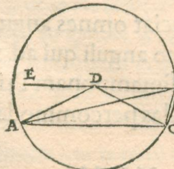
In Circulo, angulus qui ad Centrum duplus est eius qui ad peripheriam, quum vterque super eandem peripheriæ portionem constiterit.

In Circulo A B C, cuius Centrum D, sit angulus A D C ad Centrum, angulus verò A B C ad peripheriam: quorum vterque super eandem peripheriæ portionem A C consistat. Dico angulum A D C duplum esse anguli A B C.

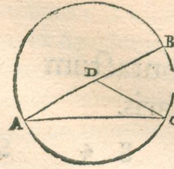
Aut enim neutra duarum A B & C B, neutram secat duarum A D & D C: Aut altera illarum, alteram harum: Aut denique altera harum, in altera est illarum. Ac primò neutra duarum A B & C B, neutrã secet duarum A B & C D. Tum per punctum D ducatur linea B D E. Eritq;, per trigesimamsecundam Primi, angulus A D E æqualis duobus angulis A B D & B A D, interioribus oppositis. Qui quũ sint æquales, per quintam eiusdem, erit ipse A E D duplus anguli A B D. Eadem ratione erit angulus C D E duplus anguli C B D. Totus igitur A D C duplus est totius A B C, Quod fuit ostendendum.



Quòd si altera illarum, vt A B, secet alterã harum, vt C D: tum producta B E, fiet angulus E D C duplus anguli D B C, per trigesimamsecundam Primi. Dempto igitur E D A, qui duplus est anguli D B A, à toto E D C: demptoq; D B A à toto D B C: erit reliquus A D C, reliquo A B C duplus, Quod erat probandum.



Si verò altera harum, vt A D, sit in altera illarum, vt A D B sit linea vna: tum angulus A D C manifestò erit duplus anguli B, per quintam & trigesimamsecũdam Primi, Quod erat demonstrandum.

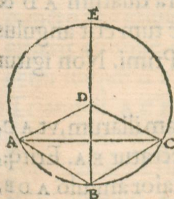


H o c loco annotauit Nicolaus Tartalea sequentem appendicem. Quam nos in Theorema redegimus: & aliquantò breuiùs demonstrauimus ex hac Decimanona.

Si

Si fuerint duo anguli, quorum vnus ad Centrum, alter ad peripheriam, & ambo vna recta linea subtendantur: erit spatium circa angulum qui ad Centrum, comprehensum, duplum anguli qui ad peripheriam.

Maneat angulus A D C, vt modò, ad Centrum: & constituatur ad peripheriam A B C, angulus eiusdem appellationis A B C. Et per Centrum D ducatur linea B D E secans peripheriam in puncto E. Dico duos angulos A D E & C D E simul sumptos, duplos esse ad angulum A B C.

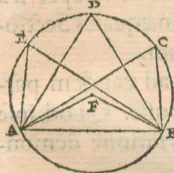


Id verò patet ex hac ipsa Decimanona. Nam A D E angulus ad Centrum, duplus est anguli A B D: quum sint super eandem peripheriam A E. Eadem ratione, C D E duplus est ipsius C B D. Quare duo anguli A D E & C D E simul sumpti, dupli sunt ad totum A B C angulum, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XX.

Theoni 21.

In Circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, inter se sunt æquales.



In segmento A D B, Circuli A B C D, cuius Centrum F, sint anguli A C B, A D B & A E B. Dico omnes esse æquales.

Connectatur A B. Ac tum si duæ linearum aliquæ se in Centro secent: erit manifesta propositio ex antecedente. Erit enim angulus A F B, duplus ad vnumquenque illorum: quapropter, ex animi Notione, ipsi inter se æquales. Quòd si non se secuerint, tum ductis A B & B F, idem statim innotescet.



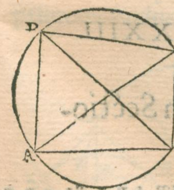
Si verò fuerint in minori segmento, vt in A E B: tum connexis A F & B F: atque item ductis lineis ab vnoquoque angulorum, per Centrum, ad peripheriam (hîc verò satis fuerit duxisse E F G:) erit totum spatium circa angulum F, duplum ad vnumquenque illorum. Quare ipsi inter se æquales, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXI.

Theoni 22.

Quadrilaterotum in Circulis inscriptorum, duo anguli inter se oppositi, duobus rectis sunt æquales.

Sit Quadrilaterum A B C D, in Circulo eiusdem designationis, A B C D inscriptum. Dico binos quosque angulos oppositos, duobus rectis esse æquales.



Ducantur in Quadrilatero duæ lineæ dimetientes, A C & B D. Eruntq;, per antecedentem, duo anguli A B D & A C D, qui in eodem segmento A B D, æquales: Duo itidem C B D & C A D, qui in eodem segmento B D C, æquales. Totus itaque B angulus, duobus A C D & C A D æqualis. At duo ipsi A C D & C A D cum toto D, sunt duobus rectis æquales, per trigesimamsecundam Primi. Sunt igitur duo B & D, auguli oppositi, duobus rectis æquales. Eadē argumētatione probabimus duos A & C oppositos, duobus rectis esse æquales.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXII.

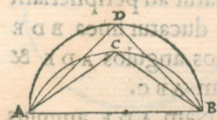
Theoni 23.

Super eadem recta linea, duæ Circulorum sectiones similes

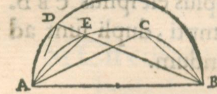
inæquales

inæquales ad eandem partem constitui non possunt.

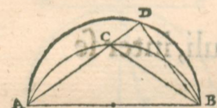
Sit recta linea A B, super qua constituta sit Sectio A C B: & ducantur rectæ A C & B C. Dico super eadem A B non posse constitui ex eadem parte similem Sectionem Circuli, inæqualem.



Si enim fieri possit, constituatur A D B Sectio maior. Et ducantur rectæ A D & B D. Aut igitur neutra duarum A D & B D, neutram secabit duarum A C & B C. Ac tum erit angulus C maior angulo D, per vigesimamprimam Primi. Non igitur erunt Sectiones similes, ex Definitione vltima huius.



Quòd si altera harum, vt B D, secet alteram illarum, vt A C, & peripheriam minorẽ in puncto E: connectatur E A. Eritq́;, per decimamsextam Primi, angulus A E B maior angulo A D B, exterior interiori. Ob id & A C B, qui æqualis est A E B, per vigesimam huius, maior eodem A D B. Quare nec sic Sectiones similes.



Si demùm altera illarum, vt A C, sit pars alterius harum, vt ipsius A D: erit & per eandem decimamsextam Primi, angulus C maior angulo D. Non igitur sunt similes Sectiones.

Ex his verò satis constat, minorem Sectionem super A B constitui non posse ipsi A C B similem. Quare nullo modo similes inæquales Sectiones super eadem linea constitui possunt, Quod erat demonstrandum.

Hic subiecit Campanus, Super eadem recta linea, neque ad eandem partem neque ad oppositam, similes Sectiones inæquales constitui posse. Quod ipse probat ex superpositione, quam vocant, Figurarum. Id verò alia ratione demonstrabimus.

Sit Circuli portio A B C (seu Sectio, nihil facio discriminis) constituta super A C linea. Ex altera verò parte constituatur portio A D C super eadem A C, ipsi A B C similis. Dico A B C & A D C sic non posse esse inæquales. Sit enim, si possit, maior A D C: & diuidatur A C bifariam in puncto E: & ducatur recta B E D, secans ad rectos angulos ipsam A C: Et connectantur A B, C B: A D, & C D.



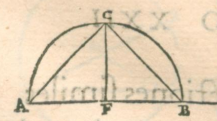
Et quoniam maior est A D C portio quàm A B C: maior quoque erit perpendicularis E D quàm E B, vt præmonstrauimus ad calcem Definitionum huius Tertij. Resecetur ergo E D ad æqualitatem E B: & sit E F æqualis E B. Eritq́; Triangulum A E B æquale Triangulo A E F, per quartam Primi: Et angulus E B A æqualis angulo E F A. Ac simili ratione, per eandem, erit angulus E B C æqualis angulo E F C. Totus igitur A B C toti A F C æqualis. Sed ipse A F C, per vigesimamprimam Primi: maior est ipso A D C. Igitur & A B C maior quàm A D C. Quare, à Definitione, ipsæ A B C & A D C portiones, non sunt similes, Quod est contra positionem. Non sunt igitur similes & inæquales, Quod erat probandum.

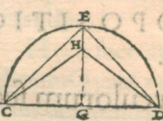
THEOREMA 21, PROPOSITIO XXIII.

Theoni 24.

Super æqualibus rectis lineis, similes Circulorum Sectiones constitutæ, inter se sunt æquales.

Sint duæ lineæ A B & C D æquales: ac super ijsdem constitutæ duæ A B C & C D E Sectiones similes. Dico ipsas Sectiones esse æquales.





Sin minus, Altera illarum alteri superposita, excedet maior minorem. At linea A B est vna linea cum C D. Vnde accidet contra præceptum antecedentis.

Sed quia hanc Figurarum ſuperpoſitionem iandudum à Geometricis Demonſtrationibus explodendam eſſe cenſuimus: quanuis hoc Theorema nulla ferè alia probatione egeret, quàm antecedens: tamen hac ratione Geometrica demonſtrabimus.

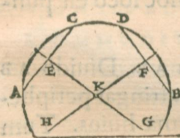
Quoniam duæ ACB & CED portiones, ſunt ſimiles, ſed non æquales: ſit maior CED. Et diuidantur duæ AB & CD lineæ biſariam: AB quidem in F, & CD in G puncto: Et erigantur duæ perpendiculares FC & GE. Et quia CED portio, maior eſt: erit quoque GE perpendicularis maior: vt ad finem antecedentis aſtruximus. Secetur itaque GE in H, vt ſit GH æqualis FC. Et quoniam duo latera AF & FC, Trianguli ACF, ſunt æqualia duobus CG & GH, Trianguli CHG: & anguli F & G æquales: erit quoque baſis AC, baſi CH æqualis: & angulus ACF angulo CHG, per quartam Primi. Similiter erit angulus BCF, angulo DHG æqualis. Quapropter totus angulus ACB, toti angulo CHD æqualis. Sed CHD angulus, maior eſt CED angulo, per vigeſimamprimam Primi. Igitur & ACD angulus maior CED angulo. Quare Sectiones non ſunt ſimiles, Quod eſt contra poſitionem.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO XXIIII.

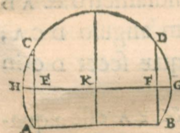
Theoni 25.

Circuli ſectione data, Circulum perficere cuius eſt ſectio.

Sit Sectio data AB, ex qua ſit perficiendus Circulus.



Ducam in ipſa duas lineas fortuitas AC & BD: quas diuidam biſariam: AC quidem in puncto E, & AD in puncto F. Tum à duobus punctis diuiſionum, ducam intra Sectionem duas perpendiculares EG & FH: quæ ſe ſcindant in puncto K. Eritq; Centrum Circuli in vtraque ipſarum, per Conſectarium primæ huius. Igitur K Centrum, Quod erit inueſtigandum.



Si verò EG & FH non ſecent inter ſe, ſed ſint linea vna, vt GH, in ſecunda Figura: quod fit, quum duæ AC & BD ſunt æquidiſtantes: tunc GH applicata ad vtranque partem peripheriæ datæ, capiet Centrum Circuli, per idem Conſectarium. Neque enim æquidiſtantes eſſe poterunt EG & FH. Eſſent enim eiuſdem peripheriæ duo Centra.

Hæc eſt generalis Demonſtratio perficiendi Circuli, quocunq; arcu dato: quam & adſcribit Campanus. Ex qua deprompta eſt ratio illa compendiaria Centri inueniendi, Artificibus vulgò vſitata.

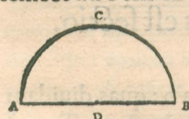
Sit enim peripheria ABCD, cuius Centrum ſit reperiendum. Pono Centrum fortuitū in puncto aliquo datæ peripheriæ, vt in A: ſuper quod deſcribo peripheriā liberæ extenſionis, quæ ſit EFG. Tum in puncto altero peripheriæ, vt in B, poſito Centro, deſcribo peripheriam eodem interuallo quo priorem, EHG: quæ ſecet EFG priorem, in duobus punctis E & G. Duco poſtmodùm ab ipſis Centris, rectas AE & BE: itemq; AG & BG. Suntq; hæ quatuor poſtremæ lineæ æquales: quum ſint Semidiametri Circulorum æqualium. Tum duco AB rectam: Fientq; duo Triangula Iſoſcelia AEB & AGB: quorum baſis communis AB. Hanc igitur AB diuido bipartitò in puncto K: Quod omninò cadet intra duas peripherias EFG & EHG: ne ſit pars maior toto. Et connecto EK: quam produco ad G punctum. Vides iam duo Iſoſcelia diuiſa eſſe in quatuor Triangula EAK, EBK: GAK, & GBK æqualia. Duo enim latera AE & AK, Trianguli AEK, ſunt æqualia duobus BE & BK, Trianguli BEK: & baſis EK vtriq; comm

communis. Duo igitur anguli qui ad K, duorum Triangulorum A E K & B E K, per octauam Primi, sunt æquales: ob idq;, recti. Eadem ratione erunt duo reliqui anguli qui ad K recti. Quapropter E G linea vna, per decimamquartam Primi. Quæ quum diuidat A B ad angulos rectos: ipsa exit ad Centrum, per Consectarium primæ huius. Atque eadem erit probatio duarum peripheriarum similiter ductarum ac se scindentium in punctis L & M: è quibus educta linea L M, secabit lineam E G in puncto N. Quod erit Centrum Circuli, per ipsum primæ huius Consectarium: intellecta C D recta linea, ipsam L M ad angulos rectos secante, Quod erat probandum.

HANC demonstrationem apposui, vt videret vnusquisque quantum compendij fieri possit eorum quæ in arte fusè docentur. Id verò totum à Quadrati cum Circulo commercio proficiscitur. Triangula enim ad Quadrilaterorum probationem conferunt. Quadrilatera verò, sed præcipuè Quadrata, ad Circulos accommodantur.

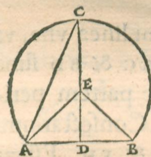
Vt hîc, si intelligamus A E B G Quadratum: cuius vna Diameter A B peripheriam datam secat: altera E G, Centrum respicit. Sed hæc præter Demonstrationem.

Quæ verò sequuntur Demonstrationes, hanc Euclidis vigesimamquartam probant per capita: hoc est, ad nominatas Circulorum portiones singillatim pertinent: scilicet ad Semicirculum, portionesq; Semicirculo maiores aut minores.



Primùm itaque Semicirculo dato, cuius sit Centrum inueniendum: quia linea ipsum subtendens est Diameter: in ipsius puncto medio erit Centrum Circuli: quale hoc loco est punctum D in Diametro A B, Semicirculi A C B.

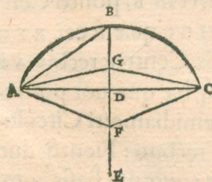
Sed sit data portio Semicirculo maior, vt A C B, cuius subtensa A B. Diuido A B æqualiter in D puncto: à quo excito perpendicularem D C, quæ attingat peripheriam in C. Atque hæc transibit per Centrum, ex Consectario primæ huius. Tum



connecto A C. Et quia angulus C A D maior est angulo A C D, per decimamnonam Primi, quum C D maior sit Semidiametro, & A D multò minor: rescindo angulum C A E, æqualem angulo D C A, per vigesimamtertiam Primi, ducta linea A E, quæ secet D C in puncto E. Dico E Centrum esse Circuli.

Connecto E B. Et constat, ex sexta Primi, E C & E A esse æquales: quum duo anguli E A C & E C A sint æquales: item, per quartam eiusdem, E A & E B esse æquales: quum duo latera A D & D E, Trianguli A E D, sint æqualia duobus lateribus D B & D E, Trianguli D E B. Tres igitur E A, E B, & E C sunt æquales. Quare, per sextam huius, erit E Centrum Circuli.

Iam verò detur A B C portio, minor Semicirculo. Huius subtensam A C diuido æqualiter in puncto D. Et per ipsum D, duco ad angulos rectos lineam B D E: In qua



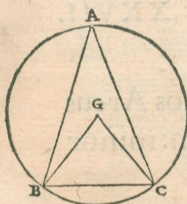
quidem erit Centrum Circuli, per Consectarium sæpè citatum: sed non inter puncta D B: esset enim A B C maior Semicirculo, contra positionem. Connecto igitur B A: & ab A puncto duco lineam, quæ cum B A faciat angulum æqualem angulo A B F, per vigesimamtertiam Primi: sitq; illa A F: scilicet angulus F A B sit æqualis angulo F B A: (Neque enim cadet vt A G, inter D & B. Ducta enim G C, essent, ex sexta & quarta Primi, tres G A, G B, & G C, æquales: essetq; G Centrũ Circuli, per sextam huius, quod modò improbatum est.) Connecto itaque F C. Atque eadem, qua paulò antè, argumentatione, erunt tres F A, F B, & F C æquales. Quare F Centrum Circuli, Quod erat demonstrandum.

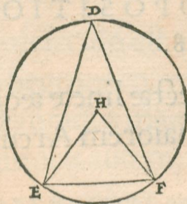
ATQVE eæ inueniendi Centri Demonstrationes, commendationem quandam habent varietatis, sed vsum parum necessarium. Prima enim omnes abundè supplet.

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXV.
Theoni 26.

In Circulis æqualibus, qui ad Centrum quíq; ad Peripheriam ſunt æquales anguli, ii ſuper æquos Arcus conſiſtunt.

Sint duo Circuli æquales: A B C, cuius Centrum G, & D E F, cuius Centrum H: ſintq́, ad Centra duo anguli A G C & E H F æquales: aut ad Peripheriam duo B A C & E D F æquales. Dico Arcum B C æqualem eſſe Arcui E F.





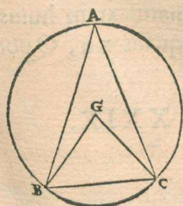
Connectantur B C & E F. Et quoniam Circuli ſunt æquales: erunt G B & G C Semidiametri, æquales duabus H E & H F, per definitionem æqualium Circulorum. Quapropter quum duo G & H anguli ſint æquales: erit, per quartam Primi, baſis B C, baſi E F æqualis. Quumq́; angulus A ſit æqualis angulo D: erit Segmentum B A C ſimile Segmento E D F, per definitionem Similium portionum. Et quia ſuper æquales lineas cōſiſtunt: ipſa erunt æqualia, per vigeſimamtertiam huius. Quare, ex communi Notione, duo reliqui Arcus B C & E F ſunt æquales, Quod erat demonſtrandum.

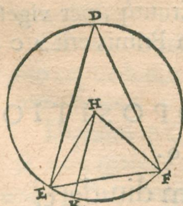
COMMODIVS tamen probabimus ſeparatim, vt Campanus. Ponantur enim vt priùs, duo anguli ad Centra, æquales. Ac tum connexis B C & E F, erunt, propter æqualitatem Semidiametrorum, ipſæ B C & E F æquales, per quartam Primi. Ducantur itaque B A & C A ad Peripheriam: itemq́; E D & F D. Et erunt duo anguli A & D, per decimamnonam huius & animi Notionem, æquales. Igitur, per definitionem Similium Segmentorum, erunt duo Segmenta B A C & E D F ſimilia: ob idq́;, per vigeſimamtertiam huius, æqualia: quum ſint ſuper æquales lineas. Quare duo reliqui Arcus B C & E F æquales, Quod eſt prius.

Iam verò ponantur A & D anguli ad Peripheriam, æquales. Et erunt, ex definitione, Segmenta æqualia. Ac tum ductis G B & G C: itemq́; H E & H F: erunt ipſi G & H anguli, per decimamnonam huius & animi Notionem, æquales. Et quia Semidiametri ſunt æquales: erunt, per quartam Primi, duæ B C & E F æquales. Erunt itaque, vt priùs, Segmenta B A C & E D F æqualia, per vigeſimamtertiam huius. Quare duo reliqui Arcus æquales, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXVI.
Theoni 27.

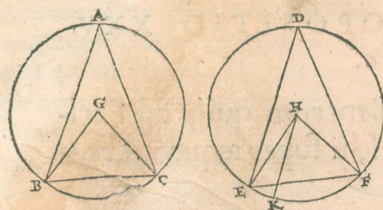
In Circulis æqualibus, qui ſuper æquos Arcus conſiſtunt anguli, ſiue ad Centra, ſiue ad Peripherias conſiſtant, inter ſe ſunt æquales.





Sint duo Circuli æquales, A B C, cuius Centrum G: & D E F, cuius Centrum H: ſintq́; duo anguli G & H ad Centra: vel duo A & D ad Peripheriam, ac ſuper duos Arcus æquales B C & E F. Dico angulum G, eſſe æqualem angulo H: & angulum A, angulo D. Hæc eſt Conuerſa antecedentis.

Si enim G non eſt æqualis H, ſit H maior:



fiatq; F H K æqualis ipsi G. Ac tum, ex antecedente, erit Arcus F K æqualis Arcui B C: Quapropter & Arcui E F, pars toti. Atque idem proueniet absurdum, si positis B C & E F Arcubus æqualibus, non fuerint A & D anguli ad Peripheriam, æquales.

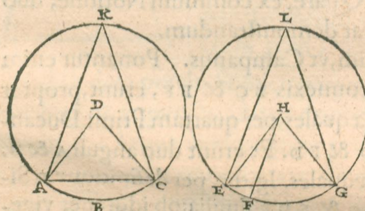
VEL sic, Quum probati fuerint G & H anguli æquales, tum ductis B A & C A, itemq; E D & F D: erunt A & D anguli æquales, ex decimanona huius & animi Notione, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXVII.

Theoni 28.

In Circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ æquos Arcus abscindunt: & maior linea, maiorem Arcum: minor verò minorem.

Sint duo Circuli æquales: A B C, cuius Centrum D: & E F G, cuius Centrũ H: Sitq; A C recta linea, æqualis E G rectæ lineæ. Dico duos Arcus A B C & E F G esse æquales.



Quòd si E G sit maior, maiorem etiam esse Arcum E F G.

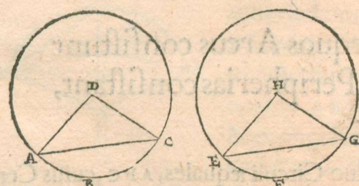
Connectantur A D & C D ad Centrum: vel A K & C K ad Peripheriam: ac similiter E H, G H: & E L, & G L. Et quia Semidiametri vtrinque sunt æquales, & bases itidem æquales: erunt, per octauam Primi, duo anguli D & H æquales: Ob idq;, per antecedentem, Arcus A B C æqualis Arcui E F G, Quod est prius.

At si E G linea ponatur maior: erit quoq; angulus H maior, per vigesimamquintam Primi. Facto itaq; angulo F H G æquali ipsi D: erit Arcus F G æqualis Arcui A B C, per vigesimamquintam huius. Maior igitur E F G ipso A B C, Quod erat probandum.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXVIII.

Theoni 29.

In Circulis æqualibus, sub æquis Arcubus æquales rectæ lineæ subtenduntur.



Sint duo Circuli æquales: A B C, cuius Centrum D: & E F G, cuius Centrum H: sitq; Arcus A B C æqualis Arcui E F G. Dico lineam A C esse æqualem lineæ E G. Conuersa antecedentis.

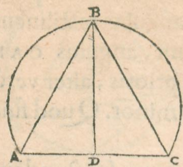
Connectantur D A & D C: itemq; H E & H G. Eruntq;, per vigesimamsextam huius, anguli D & H æquales. Quare, per quartam Primi, erit A C æqualis E G, Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 4, PROPOSITIO XXIX.

Theoni 30.

Datum Circuli Arcum bifariam diuidere.

Sit datus Arcus A B C, cuius ſubtenſa A C. Hunc volo biſariam diuidere.



Secetur A C æqualiter in puncto D. A quo erigatur perpendicularis D B, ſecans datum Arcum in B. Hanc dico eſſe quæ diuidit Arcum A B C per æqualia in puncto B.

Connectantur B A & B C: quæ, per quartam Primi, erunt æquales: Quapropter, ex priori parte vigeſimæſeptimæ huius: erit Arcus A B æqualis Arcui B C, Quod fuit demonſtrandum.

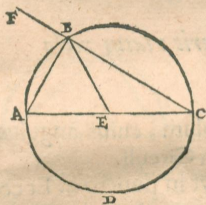
THEOREMA 26, PROPOSITIO XXX.

Theoni 31.

Qui in Semicirculo eſt angulus, rectus eſt: Qui verò in maiori Segmento, minor recto: Et qui in minori, maior. Sed angulus maioris Segmenti Mixtus, recto maior: minoris autem, minor.

Sit in Circulo A B C D, cuius Centrum E, Diameterq; A C, Semicirculus A B C: in quo ſit angulus B rectilineus, eiuſdem deſignationis A B C. Dico hunc eſſe rectũ.

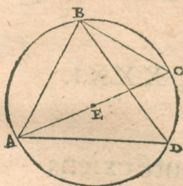
Connectatur B cum Centro, ducta linea E B. Eritq;, per quintam Primi, angulus A æqualis angulo E B A: & angulus E B C, angulo E C B: quapropter duo anguli qui ad B, æquales duobus angulis A & C. Atqui totus B angulus cum duobus A & C, ſunt duobus rectis æquales, per trigeſimamſecundam Primi. Quum igitur B ſit eorum dimidium: ipſe B eſt rectus.



VEL, vt alij, Quia angulus C E B æqualis eſt duobus A & E B A, per priorem partem trigeſimæſecundæ Primi: ipſe erit duplus ad angulum E B A: Itidem A E B duplus erit ad E B C. Duo igitur anguli qui ad E, dupli ſunt ad totum B. Quare B eſt dimidia pars duorum rectorum, ac propterea rectus.

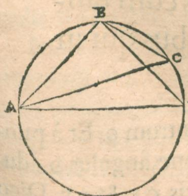
VEL rurſus ſic. Protrahatur C B ad F punctum. Et quia duo anguli qui ad B, Trianguli A B C, ſunt æquales duobus A & C, per quintam Primi: & angulus A B F iiſdem A & C æqualis, per trigeſimamſecundam eiuſdem: erunt duo A B F & A B C æquales. Quare vterque rectus, per decimamquintam Primi.

Mira Diametri Potentia: vt ſemper æqualis ſit duabus quas coniungit potentijs.



Sit deinde in Circulo A B C D, cuius Centrum E, portio A B D maior Semicirculo: eiuſq; ſubtenſa, recta A D: ſuper quam angulus rectilineus A B D. Hunc dico eſſe minorem recto.

Sumatur Diameter A C: & connectatur B C. Et quia angulus A B C, vt modò oſtendimus, rectus eſt: erit, ex animi Notione, A B D angulus, minor recto.



Sed ſit portio A B C, cuius ſubtenſa A C, minor Semicirculo. Dico angulum A B C maiorem eſſe recto.

Ducatur Diameter A D: & connectatur B D. Et erit, ex primo capite huius, A B D (pars ipſius A B C) rectus. Quare A B C recto maior.

Demùm in Circulo A B C D ſit portio A B C, cuius ſubtenſa A C, maior Semicirculo: portio verò A D C, cuius ſubtenſa eadem A C, minor eodem. Dico angulum Mixtum, ſcilicet qui ab Arcu C B A & recta A C comprehenditur, maiorem eſſe recto: ſed angulum ab Arcu C D A eademq;

h 2 linea

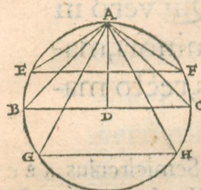
linea A C comprehenſum, minorem eſſe recto.



Ducatur Diameter B C : & producatur recta B A ad E punctum. Eritq;, per primam partem huiuſce, angulus rectilineus B A C, rectus: Et, per decimamtertiam Primi, angulus C A E rectus. Quare, quum angulus rectus ſit pars prioris, alter verò pars recti: erit ille recto maior, hic autem minor. Quod fuit probandum.

SED & hanc Propoſitionem omni ex parte ſpectandam exhibuimus, ſub hac Deſcriptione.

Sit Circulus A B C, cuius Centrum D, Diameter verò B C. Atque in eo ponatur E A F portio Semicirculo minor: & G A H portio, eodem maior: Et à punctis B, C : E, F : G, H, ducantur lineæ ad punctum A, vt in Schemate.



Eritq; de angulo B A C Demonſtratio eadem quam ſuprà dedimus: Ex qua cæterorum angulorum probationes erunt manifeſtæ.

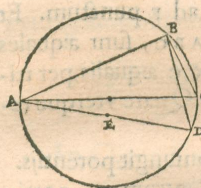
Quoniam enim duo anguli D A C & D C A ſunt æquales, per quintam Primi: itemq; duo D A B & D B A æquales, per eandem: erit totus B A C æqualis duobus B & C: Atqui totus B A C cum duobus B & C, ſunt duobus rectis æquales, per trigeſimamſecundam Primi. Totus igitur B A C rectus.

Hinc ſatis manifeſtum eſt, E A F angulum eſſe recto maiorem: ſed G A H minorem eodem. Hincq; angulum Mixtum, qui fit ex linea recta A C & Arcu C H A, eſſe recto maiorem: Angulum autem qui fit ex eadem A C & Arcu C F A, eſſe recto minorem, Quod fuit probandum.

Huic tanquam Conſectarium ſubijciemus.

Si in Circulo Triangulum Rectangulum inſcriptum fuerit: latus recto angulo oppoſitum, Diameter erit Circuli.

Sit enim in Circulo A B C D, Triangulum A B C Rectangulum, cuius angulus B rectus. Dico latus A C eſſe Diametrum Circuli.



Sin aliter: erit Centrum extra A C, vt in puncto E. Et connectatur A E: quæ educatur ad punctum D Peripheriæ, oppoſitum: ſitq; A E D Diameter: & connectatur B D. Tum angulus A B D, per hanc trigeſimam, erit rectus: ſicq; æqualis angulo A B C, pars toti, Quod eſt abſurdum. Sed nec alibi erit Centrum, quàm in A C. Eſt igitur A C Diameter, Quod erat probandum.

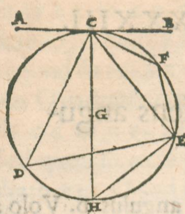
THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXI.

Theoni 32.

Si Circulum tetigerit recta linea, à contactu autẽ exiens altera linea, Circulum ſecuerit; anguli quos cum tangente efficit, æquales ſunt alternatim duobus qui in Circuli Segmentis ſunt angulis.

Sit linea A B, tangens in puncto C Circulum C D E F, cuius Centrum G. Et à puncto C ducatur linea C F, ſecans Circulum: fiatq; ſuper C D E portione, angulus D, ductis lineis C D & C F: Itemq; angulus F ſuper portione C F E, ductis C F & E F. Dico angulum E C B eſſe æqualem angulo D: angulum verò E C A, æqualem angulo E F C.

Ducatur Diameter C G H: & connectatur E H. Eritq;, per decimamſeptimam huius,



ius, C H perpendicularis ipsi A B: Et, per primam partem antecedentis, angulus D E H rectus: ob idq;, angulo A C H æqualis. Posito itaque communi E C H, erit angulus A C E, duobus C E H & E C H æqualis. At hi duo cum angulo H, per trigesimamsecundam Primi, duobus rectis sunt æquales: Et, per decimamtertiam eiusdē, angulus A C E cum angulo B C E, duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur B C F, angulo H æqualis: ob id, & angulo D, per vigesimam huius: quum sint vna portione Circuli.

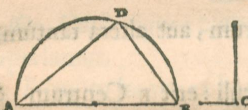
Vel breuiùs. Angulus C E H est rectus, per antecedentem: quapropter duo anguli H & E C H faciunt vnum rectum per trigesimamsecundam Primi. Quum igitur B C E & E C H faciant vnum rectum, dempto communi E C H, erit B C E ipsi H æqualis: Quare & ipsi D, per vigesimam huius, Quod est prius.

Quumq; D & F sint duobus rectis æquales, per vigesimamprimam huius: erit angulus F æqualis angulo A C E, Quod erat probandum.

Vel sic, angulus A C E cum angulo H sunt duobus rectis æquales, vt ostendimus: & B C E cum H itidem duobus rectis æquales, per vigesimamprimam huius: quorum B C E est ipsi H æqualis. Angulus igitur E ipsi A C E est æqualis, Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 5, PROPOSITIO XXXII.
Theoni 33.

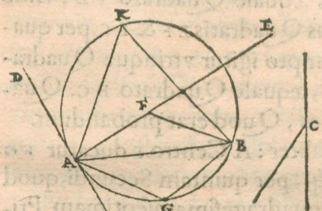
Super data linea Sectionem Circuli describere, quæ capiat angulum angulo dato æqualem.



Sit linea data A B: datus verò angulus C. Volo super linea A B describere Circuli Sectionem, quæ capiat angulum æqualem angulo C.

Ac primùm, si fuerit angulus C rectus, descripto Semicirculo A D B super linea A B, ductisq; A D & B D: erit angulus D rectus, per primam partem trigesimæ huius.

Si verò fuerit obtusus, ducam lineam D A, facientem cum A B, angulum D A B, æqualem angulo C obtuso, per vigesimamtertiam Primi. Et à puncto A, ducam super A D, perpendicularem A E interminatam. Tum à puncto B, versus A E ducam lineam B F, secantem A E in puncto F: quæq; cum A B constituat angulum A B F, æqualem angulo E A B, quo obtusus rectum superat.

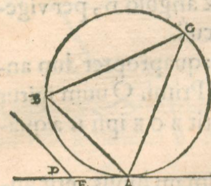


Eruntq;, per sextam Primi, A F & F B æquales. Posito itaque puncto F Centro, describo, secundùm spatium F A & F B, Circulum A G B A. Et, per Consectarium decimæquintæ huius, linea D A tanget Circulum. Duco itaque A G & B G, constituentes angulum G: qui, per antecedentem, erit æqualis angulo D A B: quapropter angulo C obtuso.

Iam verò si angulus C fuerit acutus: ducam A H lineam, quæ contineat cum A B angulum H A D æqualem angulo C acuto. Tum à puncto A, ducta perpendiculari A E, facio angulum A B F æqualem angulo B A E, quo rectus superat acutum: vt B F secet A E in F puncto. Ac tum, vt in superiori schemate, erunt F A & F B æquales, per sextam Primi: Eritq; F Centrum Circuli describendi. Inde ductis ad maiorem portionem lineis A K & B K: erit angulus K, per antecedentem, æqualis angulo B A H: Quare & angulo C dato, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XXXIII.
Theoni 34.

A dato Circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum dato angulo rectilineo æqualem.

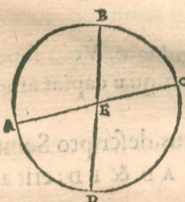


Sit Circulus datus A B C, datus verò angulus D. Volo à Circulo A B C abſcindere ſegmentum, capiens angulum æqualem angulo D.

Duco lineam E F, quæ, per decimamſeptimam huius, tangat Circulum in A puncto: A quo intra Circulum duco lineam A B, quæ cum A E faciat angulum E A B æqualem angulo D, per vigeſimamtertiam Primi. Ac tum ductis lineis A C & B C, erit angulus C in ſegmento A C B, æqualis angulo E A B, per trigeſimamprimam huius: Quare & angulo D dato, Quod fuit faciendum.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIIII.
Theoni 35.

Si in Circulo duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint: quod fit ex ſegmentis vnius, Rectangulum, æquum eſt ei quod ex alterius ſegmentis fit, Rectangulo.



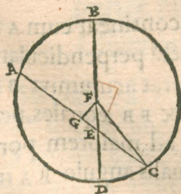
Sint in Circulo A B C D, duæ lineæ A C & B D, ſecantes ſe in puncto E. Dico id quod fit ex A E in E C, æquum eſſe ei quod fit ex B E in E D.

Aut igitur vtraque tranſit per Centrum, aut altera tantùm, aut neutra.

Si enim vtraque ſit Diameter Circuli: erit E Centrum & quatuor ſegmenta æqualia: ſicq; conſtabit propoſitio.

Si verò altera tantùm tranſeat per Centrum, vt B F D: aut ipſa ſecabit A C æqualiter, aut inæqualiter. Quòd ſi æqualiter: ſecabit & ad rectos angulos, per priorem partem tertiæ huius: Tum ducatur F C. Et erit, per quintam Secundi, quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale Quadrato F D: vnde & Quadrato F C: ob idq;, duobus Quadratis E F & E C, per quadrageſimamſeptimam Primi. Dempto igitur vtrinque Quadrato E F: erit quod fit ex B E in E D, æquale Quadrato E C. Quare & ei quod fit ex A E in E C, quum ipſæ ſint æquales, Quod erat probandum.

At ſi B D tranſiens per Centrum, ſecet A C inæqualiter: A Centro F ducatur F G perpendicularis ipſi A C: Et connectatur F C. Eritq;, per quintam Secundi, quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F (ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, cum Quadratis F G & E G) æquale Quadrato F D: atque ob id, Quadrato F C: ob idq;, duobus Quadratis F G & G C. Ablato ergo vtrinque Quadrato F G: erit quod fit ex B E in E D cum Quadrato G E, æquale Quadrato G C. At, per quintam Secũdi, quod fit ex A E in E C cum Quadrato G E, æquale eſt Quadrato G C. Ablato igitur vtrinq; Quadrato G E, erit quod fit ex B E in E D, æquale ei quod fit ex A E in E C, Quod erat probandum.



QVONIAM verò hæc Demonſtratio ex ijs eſt quæ non expeditè capiuntur: qui in ſimiles incidet, ſtudeat ipſas in ſuos articulos diuidere. Verbi gratia, in hoc poſtremo ſchemate ſic ratiocinetur. Quod fit ex

fit ex BE in ED cum Quadrato EF, æquale est ei quod fit ex AE in EC cum eodem Quadrato EF. Quod igitur fit ex BE in ED, æquale est, per animi Notionem, ei quod fit ex AE in EC. Assumptio sic probatur. Quod fit ex AE in EC cum duobus Quadratis GE & GF (hoc est, cum Quadrato EF) est æquale duobus Quadratis GC & GF, per quintam Secundi & animi Notionem: ob idq́; , Quadrato FC. Sed quod fit ex BE in ED cum eodem Quadrato EF, probatum est æquale Quadrato FC. Quod igitur fit ex BE in ED cum Quadrato EF, æquale est ei quod fit ex AE in EC cum eodem Quadrato EF. Probata Assumptione, consequitur, vt ablato communi Quadrato EF, maneat id quod fit ex BE in ED, æquale ei quod fit ex AE in EC, Quod fuerat demonstrandum.

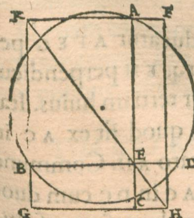
Iam verò, vt ad Propositionem reuertamur, si neutra linearum transeat per Centrum, siue æqualiter, siue inæqualiter se diuiserint: per punctum sectionis E, ducam Diametrum GH, in qua Centrum F. Ac tum si altera illarum diuidatur æqualiter, vt AC ab ipsa BD: diuidetur quoque ipsa AC æqualiter à Diametro CH: idq́; , per tertiam huius, ad angulos rectos. Quapropter, ex secunda specie huiusce Propositionis, quod fit ex GE in EH, æquum est ei quod fit ex BE in ED. Quod igitur fit ex AE in EC, æquum est ei quod fit ex BE in ED, Quod erat probandum.

At si neutra alteram æqualiter diuidat: erit ex tertia specie, quod fit ex GE in EH, æquale ei quod fit ex AE in EC: & æquale ei quod fit ex BD in ED. Quare vtrunque æquale alteri. Ac sic constat ex omni parte Propositio.

INTER eas quæ hoc Tertio libro demonstrantur Propositiones, hæc certè vna est ex præcipuis. Vsum enim habet varijs modis notabilem. In quam commentari pro dignitate longum esset. Capita igitur tantummodò aliqua seligemus, vt ex ijs ad alia meditanda viam aperiamus.

Primùm itaque ex hac intueri licet Circuli vim & autoritatem. Qui quum lineas in Centro se scindentes, atque ex his producta æqualia, nempè Quadratas Figuras, in æqualitate contineat: idem iuris etiam retinet in reliquorum punctorum decussationibus. Nam quocunque in loco sese scindant lineæ: partes semper æqualia producta faciunt, vt modò ostendimus. Atque ex hoc multa in Geometriam dispersa sunt Theoremata & Problemata. Imprimis vltima Propositio Secundi, quæ dato Rectangulo æquale Quadratum componit. Si enim attentè inspexerimus secundam, quam in hac descripsimus, speciem: intelligemus Rectangulum compositum ex duobus lateribus BE & ED: quæ in vnam lineam continuamus, qualis est BD: atque ex hac facimus Diametrum Circuli: & ex puncto diuisionis E, perpendicularem ducimus ad peripheriam, qualis hoc loco EA: quæ continuata ad punctum oppositum C, constituit AC lineam, bipartitò diuisam in E: ob idq́; , quod fit ex AE in EC, est Quadratum: & æquale ei quod ex BE in ED fit, Rectangulo.

Ex hac etiam deprompta est quadragesimatertia Primi, quam Gnomonicam vocauimus.



Sint enim in Circulo ABCD, duæ lineæ AC & BD, se scindentes in puncto E: sitq́; quod fit ex AE in EC, Rectangulum AEDF: quod verò ex BE in ED, sit Rectangulum EBGC: commutatis partibus EC & ED, vt vides.

Quum itaque hæc duo Rectangula, in solo puncto E iuncta sint, & nutare quodammodo videantur: ea connectenda fuerunt, & stabilienda. Quod firmiùs fieri non poterat, quàm perfecto Parallelogrammo FHGK, ductaq́; Diametro HK. Ac tum duo Supplementa EF & EG apparent æqualia. In quo mira quædam re-

rum colligatio & cõsecutio sese offert expendendam. Quod nos præterire cogimur, aliò properantes. Id vnum tamen dicemus, lineam G H tanto spatio egredi Circulum, quanto K F eundem ingreditur: Et Diametrum H K tantum distare à Centro Circuli, quantum duo Parallelogramma H E & E K absunt à Quadratis. Si enim Quadrata essent, nempè si fuissent E C & E D æquales: totum F G, Quadratum esset, Circulo circunscriptum: ipsiusq; Diameter H K, eadem cum Circuli Diametro.

Hinc quoque desumptum est, vt super data linea, dato Rectangulo æquale Rectangulum constitueretur. Hic enim super linea B E, quam pro data sumimus, constituitur Rectangulum E G, æquale Rectangulo E F, quod etiam pro dato sumitur.

Ex hac etiam facilè habetur excessus Parallelogrammi maioris supra minus. Quid multa? ex hoc Theoremate innumerabiles considerationes, velut ex fonte quodam, emanant: quæ ad Proportiones pertinent. Quas, quum illùc ventum erit, poterit sibi Lector effingere, ex huius Propositionis recordatione.

Neque miretur quisquam, quòd priora cum posterioribus retexam. Id enim ad Demonstrationes eruendas tantùm facio. Nam aliud est, artem tenere; aliudq;, artem docere. Multaq; priora sunt naturâ, quæ ars cogitur posteriora tradere: atque econtrariò: nempè, aut compendij faciendi, aut lucis addendæ, aut denique methodi obseruandæ gratia.

THEOREMA 30, PROPOSITIO XXXV.

Theoni 36.

Si à puncto extra Circulum signato duæ lineæ ductæ fuerint, quarum altera secet Circulum, altera tangat: quod ex tota secante in partem sui extimam fit, Rectangulum, æquum est ei quod ex tangente fit, Quadrato.

Sit punctum A, signatum extra Circulum B C D, cuius Centrum E: ducanturq; duæ lineæ, A D C quidem Circulum secans in D puncto: & A B eundem tangens in B. Dico id quod fit ex tota A C in partem A D, esse æquale Quadrato A B.

Aut enim A D C transit per Centrum, aut non transit. Si transit: ducatur à Centro E ad punctum contactus B, linea E B: Quæ, per decimamseptimam huius, erit perpendicularis ipsi A B. Et quoniam linea D C diuisa est per æqualia in puncto E, additurq; ei linea D A: erit, per sextam Secundi, quod fit ex tota A C in partem A D cum Quadrato E D (ob idq;, cum Quadrato E B) æquale Quadrato A E: atque ob id, Quadratis duarum A B & E B. Dempto igitur communi Quadrato E B: erit quod fit ex A C in A D, æquale Quadrato A B, Quod erat probandum.

Si verò A C non transit per Centrum, ducatur A F E G per Centrum E: Et connectatur E D: Ducaturq; E H perpendicularis ad A C. Et erit D H æqualis H C, per tertiam huius. Itaque, per sextam Secundi modò inductam, quod fit ex A C in D C cum Quadrato D H, æquale est Quadrato A H. Commune addatur Quadratum H E: Erit quod fit ex A C in D C cum duobus Quadratis D H & H E (ob idq;, per quadragesimamseptimam Primi, cum Quadrato E F, nam id sumo loco E D) æquale duo

le duobus AH & HE Quadratis: ob idq́;, Quadrato AE, per eandem quadragesimamseptimam. At quod fit ex AG in FG cum ipso EF Quadrato, æquale est eidem Quadrato AE. Quod igitur fit ex AC in AD cum Quadrato EF, æquale est ei quod ex AG in FG cum eodem EF Quadrato. Ablato itaque communi EF, erit quod fit ex AC in DC æquale ei quod ex AF in FG: Quare & Quadrato AB, vt modò probauimus, Quod fuit demonstrandum.

Consectaria ex Campano.

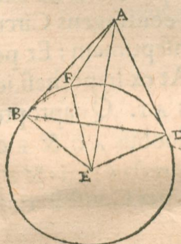
Si ab eodem puncto extra Circulum signato, plures lineæ Circulum secent: quæ ex vnaquaque in sui partem extimam fiunt Rectangula, inter se sunt æqualia.

Hoc autem ex eo manifestum est, quòd singula huiusmodi Rectangula sint æqualia Quadrato lineæ ab illo puncto ductæ ad contactum Circuli, per hanc trigesimamquintam. Ex hoc etiam addit.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ Circulum tangant, ipsæ inter se sunt æquales.

Quod quanuis Demonstratione non egeat, quum vtraque sit æqualis ei quod fit ex linea, quæ ab eodem puncto educta Circulum secat in sui partem extimam: ipse tamen sic probat.

Sit punctum A extra Circulum BCD, cuius Centrum E: ducanturq́; duæ lineæ AB & AD, quæ Circulum tangant in punctis B & D. Dico ipsas esse æquales.



Ducam lineas EB & ED. Eritq́;, per decimamseptimam huius, vterque angulorum B & D rectus: quapropter Quadratum AE, per quadragesimamseptimam Primi, æquale duobus Quadratis AB & EB: similiter & duobus AD & ED. Igitur duo AB & EB Quadrata, sunt æqualia duobus AD & ED Quadratis. Et quia EB & ED sunt æqualia: erunt duo reliqua AB & AD æqualia. Quare AB æqualis AD, Quod erat ostendendum.

Idem rursus. Connectatur linea BD. Eritq́;, per quintam Primi, angulus EBD æqualis angulo EDB. Et quia duo ABE & ADE anguli sunt æquales, nempè recti: ablatis æqualibus EBD & EDB, erunt duo ABD & ADB æquales. Quare, per sextam Primi, erit AB ipsi AD æqualis.

Nos etiam hæc addemus,

A puncto extra Circulum signato, duæ tantùm lineæ ad contactum Circuli deduci possunt.

Stante postrema descriptione, à puncto A in Circulum BCD dico non posse demitti plures contingentes, quàm duas AB & AD.

Quòd si fieri possit, educatur AF, contingens Circulum in puncto F: & connectatur EF. Eritq́; angulus F rectus, per decimamseptimam huius: Quapropter æqualis angulo EBA, repugnante vigesima Primi.

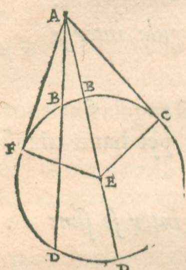
Id etiam ea ratione probabitur; quòd omnes lineæ ab vno puncto ductæ, Circulum tangentes, sint æquales: vt antè ostendimus. At duæ AB & AF æquales esse non possunt, aduersante octaua huius.

THEOREMA 31, PROPOSITIO XXXVI.
Theoni 37.

Si à puncto extra Circulum signato, duæ lineæ in Circulum

culum ceciderint, quarum altera ipsum secet, altera ei applicetur : sit autem quod ex tota secante in sui partem extimam fit Rectangulum, æquale ei quod ex applicata fit Quadrato : Applicata Circulum tangit.

Sit punctum A, signatum extra Circulum B C D, cuius Centrum E : cadantq; ab A puncto duæ lineæ, A B D quidem Circulum secans, & A C ipsi Circulo applicata : sitq; quod fit ex A D in A B, æquale ei quod fit ex A C Quadrato. Dico lineam A C tangere Circulum. Conuersa antecedentis.



Primùm enim si linea A B D transit per Centrum, ducatur recta C E. Et erit, per sextam Secundi, quod fit ex A D in A B cum Quadrato E B, ob idq; cum Quadrato E C, æquale Quadrato A E. At quod fit ex A D in A B, ponitur æquale Quadrato A C. Et Quadratum igitur A C cum Quadrato C E, æquale est Quadrato A E. Igitur, per vltimam Primi, angulus C rectus. Quare, per decimamquintam huius, linea A C contingit Circulum.

Quod si A B D non transit per Centrum, ducatur à puncto A, linea A D, in qua Centrum E. Et quia quod fit ex hac tota in sui partem extimam, æquum est ei quod fit ex A D in A B, per antecedentem: erit idipsum, ex communi Notione, æquale Quadrato A C. Quapropter E C A angulus, rectus est : ex ijs quæ modò probauimus. Ob idq;, A C contingens Circulum, Quod erat demonstrandum.

ALITER. Maneat iam inducta descriptio : atque insuper à puncto A ad alteram partem Circuli demittatur A F, per decimamsextam huius, contingens Circulum. Et connectatur E F. Eritq; angulus F rectus, per decimamseptimam : Et per antecedentem, quod fit ex A D in A B, æquale Quadrato A F. At ex hypothesi, idipsum est æquale Quadrato A C. Est igitur A C linea æqualis A F. Quapropter quum duo latera A F & E F, Trianguli A E F, sint æqualia duobus A C & E C, Trianguli A E C : & basis A E vtrique communis : sitq; angulus F rectus : erit & angulus C rectus, per octauam Primi. Quare A C tangit Circulum, per Consectarium decimæquintæ huius, Quod erat demonstrandum.

Libri Tertij Geometricorum Elementorum

FINIS.





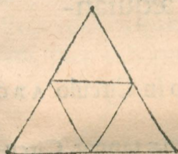
IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER QVARTVS.



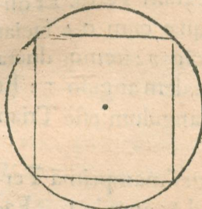
DEFINITIONES.


Igura Rectilinea, in altera Rectilinea inscribi dicitur, quum singuli inscriptæ Figuræ anguli, singula eius in qua inscribitur, latera tangunt.

2 Figura verò circa Figuram, quum singula latera circunscriptæ, singulos eius circa quam describitur, angulos tangunt.

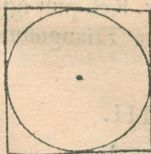


Satis constat Rectilineas Figuras eiusdem speciei, alias alijs inscribi aut circunscribi: vt Triangulum Triangulo, Quadrilaterum Quadrilatero: non diuersæ. Si enim plures sint anguli vnius, quàm latera alterius, aut contrà: non erit mutuus contactus singulorum, vt oportet.



3 Figura Rectilinea in Circulo describi dicitur, quum omnes ipsius anguli, Peripheriam tangunt:

4 Circulus verò circa Figuram Rectilineam, quũ ipsius Peripheria omnes interioris Figuræ angulos tangit.



5 Circulus in Figura Rectilinea describi dicitur, quum ipsius Peripheria singula interioris Figuræ latera tangit.

6 Figura verò Rectilinea circa Circulum, quum ipsius singula latera, Circuli Peripheriam tangunt.



7 Recta linea in Circulo accommodari dicitur, quum ipsius extrema in Circuli Peripheriam cadunt.

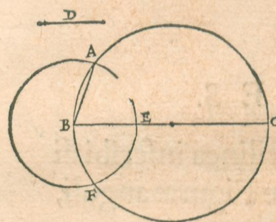
PRO

PROBLEMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.



IN dato Circulo, datæ lineæ rectæ quæ Circuli Diametro minimè maior existat, æquam lineam rectam accommodare.

Sit datus Circulus A B C, cuius Diameter B C: data verò linea D, quæ maior non sit ipsa B C. Volo in Circulo A B C aptare lineam, lineæ D æqualem.



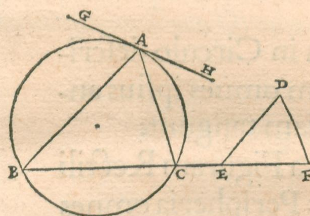
Si D est ipsi B C æqualis, constat propositio. Quis minor: abscindatur ex B C, pars B E æqualis ipsi D: & secundùm spatium B E, describatur Circulus A E F A, secans Circulum A B C in punctis A & F. Et connectatur A B: quæ, per secundam Tertij, secat Circulum A B C A: estq; ipsi B E æqualis, ex definitione Centri: Quare & ipsi D lineæ æqualis, Quod erat faciendum.

ETIAM nulla Diametro posita, aptabitur linea. Tantùm in puncto Peripheriæ fortuito ponatur Centrum: ac secundùm longitudinem lineæ datæ describatur alter Circulus, datum Circulum secans.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

In dato Circulo, Triangulum dato Triangulo æquiangulum describere.

Sit datus Circulus A B C, datum verò Triangulum, D E F. Volo in Circulo A B C describere Triangulum, Triangulo D E F æquiangulum.



Per punctum A duco G H, quæ tangat Circulum in ipso A, per decimamsextam Tertij. Et duco rectam A B in Circulum, quæ cum G A faciat angulum B A G, æqualem angulo F: itemq; ducta A C, facio angulum C A H æqualem angulo E: Et connecto B C. Dico A B C Triangulum, esse Triangulo D E F æquiangulum.

Est enim angulus B, per trigesimamprimã Tertij, æqualis angulo C A H: ob id, & angulo E. Eadem ratione angulus C æqualis est angulo B A G: ob id, & angulo F. Reliquus igitur B A C, per trigesimamsecundam Primi, reliquo D æqualis. Quare Triangulum B A C, ipsi D E F æquiangulum, Quod faciendum fuit.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Circa datum Circulum, dato Triangulo æquiangulum Triangulum describere.

Sit datus Circulus A B C, datum verò Triangulum D E F. Volo ipsi A B C Circulo circunscribere Triangulum, ipsi D E F Triangulo æquiangulum.

Protraham basin E F vtinque, vt fiant duo extrinsecùs anguli E & F. Tum à Centro Circuli, quod sit G, educam G B ad Peripheriam. Et ab eodem G puncto educta C A, constituam angulum B G A, æqualem angulo E exteriori. Similiter educta G C,

cta G C, faciam B G C angulum, æqualem angulo F exteriori. Tum per puncta A, B, & C ducam lineas H K, H L, & K L, ad rectos angulos cum Semidiametris A G, B G, & C G. Atque harum vnaquæque, per decimamquintam Tertij, tanget Circulum: Et protractæ, omninò cōcurrent, vt in punctis H, K, L: Quum enim vterque angulorum qui est ad A, & vterq; qui ad B, sit rectus: linea quæ ducetur ab A ad B, efficiet cum H K & L K, duos angulos versus K, minores duobus rectis (quia vterque pars recti). Itaque, per quintam Petitionem, concurrent H K & L K. Atque eadem ratione concurrent H L & K L: quum vterque angulorum qui ad C, sit rectus: fietq; Triangulum H K L. Quod dico esse æquiangulum Triangulo D E F.

Quoniā enim in Quadrilatero A G B K, duo anguli A & B sunt recti: erūt duo reliqui G & K, duobus rectis æquales: sunt enim cuiuslibet Quadrilateri, quatuor anguli quatuor rectis æquales: vt ostensum est ad trigesimamsecundam Primi. Atqui duo anguli qui ad E, sunt duobus rectis æquales, per decimamtertiam Primi. Quum igitur angulus G positus sit æqualis angulo E exteriori: erit angulus K, æqualis angulo E interiori. Eadem ratione erit angulus L æqualis angulo F interiori, Quare, per trigesimamsecundam Primi, reliquus H, reliquo D æqualis. Et totum Triangulum toti Triangulo æquiangulum, Quod erat probandum.

ALITER. Sit, vt priùs, Circulo A B C Triangulum circunscribendum, Triangulo D E F æquiangulum.

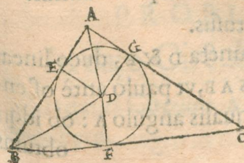
In ipso A B C Circulo, inscribo Triangulum G H K, ipsi D E F æquiangulum, per antecedentem: vt sit angulus G æqualis angulo D: angulus H, angulo E: & angulus K, angulo F. Duco postmodùm L M parallelum ipsi G H: quæ tangat Circulum in puncto A: per ea quæ addidimus ad decimamsextam Tertij. Duco similiter M N parallelum ipsi H K, & contingentem Circulum in B: itemq; L N parallelum ipsi G K, cōtingentem Circulum in C. Atque hæ tres lineæ omninò concurrent, vt ad puncta L, M, & N: quod patebit productis vtrinq; lineis G H, G K, & H K, donec secent L M, L N, & M N in punctis O, P, Q, R, S, T. Dico iam L M N Triangulum Circulo G H K circunscriptum, esse æquiangulum Triangulo D E F. Est enim euidenter æquiangulū Triangulo G H K, per legem parallelorum quum angulus M T Q sit æqualis angulo G, Trianguli G H K, ex vigesimanona Primi: ob id, & angulus L eidem G equalis, per eandem. Sic & angulus M, angulo H eiusdem Trianguli: & angulus N, angulo K. Totum igitur L M N Triangulum, toti G H K Triangulo æquiangulum: quapropter & ipsi D E F, Quod erat faciendum.

HÆC constructio ex ijs est, quæ licet tædiosæ videantur: tamen ob concinnitatem faciles sunt. Vnica etiam Propositione, nempè vigesimanona Tertij, probatur.

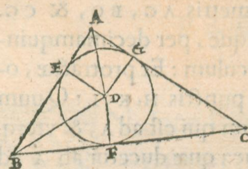
PROBLEMA 4, PROPOSITIO IIII.

In dato Triangulo Circulum describere.

Sit datum Triangulum A B C, in quo describendus sit Circulus. Diuido duos ipsius angulos A & B æqualiter, per nonam Primi, ductis lineis A D & B D: quæ concurrent intra Triangulum in puncto D. A quo ad tria latera ipsius A B C Trianguli, ducam tres perpendiculares D E, D F, & D G.



Et quoniam duorum Triangulorũ A E D & A G D, duo anguli qui ad A, sunt æquales, duoq; anguli E & G recti, & latus A D commune: erit, per vigesimamsextam Primi, linea D E æqualis lineæ D G. Rursus quum duorum Triangulorum B E D & B F D, duo anguli qui ad B, sint æquales, anguliq; E & F recti, & latus B D commune: erit, per eandem, linea D E æqualis lineæ D F. Quapropter tres lineæ D E, D F, & D G, æquales. Posito itaque Centro in D, Circulus descriptus secundùm cuiuscunque ipsarum interuallum, transibit per extremitates reliquarum duarum, ex nona Tertij. Et quia, per Consectarium decimæquintæ eiusdem, vnaquæque linearum A B, A C, & B C tangit Circulum, quia perpendicularis ad extremum Semidiametri: constat Propositio.

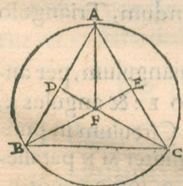


PROBLEMA 5, PROPOSITIO V.

Circa datum Triangulum, Circulum describere.

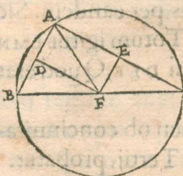
Sit datum Triangulum A B C, circa quod describendus sit Circnlus.

Duo ipsius latera diuido æqualiter: A B quidem in puncto D, & A C in puncto E. Tum excito perpendiculares ab ipsis D & E punctis: quæ protractæ concurrent, vt ad punctum F. Nam si intelligatur duci linea D E ab angulis rectis D & E: ipsa efficiet angulos versus F, minores duobus rectis. A puncto itaq; concursus F, quod dico esse Centrum Circuli, duco ad tres angulos Trianguli A, B, C, lineas F A, F B & F C. Quumq; duo latera A D & D F, Trianguli A D F, sint æqualia duobus lateribus B D & D F, Trianguli B D F: & angulus D vnius, æqualis angulo D alterius, nempè vterque rectus: erit, per quartam Primi, F A æqualis F B. Eadem ratione, comparato A E F Triangulo cum C E F: erit eadem F A æqualis ipsi F C. Tres igitur F A, F B, & F C æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Centrum Circuli, Quod erat constitutum.



HÆC est in vniuersum Circuli Triangulo circunscribendi constructio. Sed nominatis Triangulorum speciebus, sic erit faciendum.

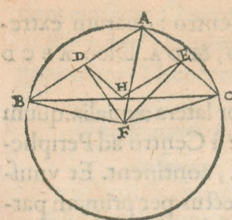
Ac primùm, sit Triangulum A B C Rectangulum, cuius angulus A rectus. Diuido latus B C angulo recto oppositum, per æqualia, in puncto F. A quo ad media puncta duorum A B & A C, duco F D & F E: quarum quum F D secet duo latera A B & B C æqualiter: ipsa erit tertio A C æquidistans: vt demonstratum est ad trigesimamnonam Primi: Eademq; ratione erit F E æquidistans A B. Et quia totus A angulus rectus est: erunt & anguli qui ad D & E, recti: per vigesimamnonam Primi. Ducta itaque F A, erunt duo latera A D & D F, Trianguli A D F, æqualia duobus B D & D F, Trianguli B D F. Ob id, quum vterque angulus qui ad D, sit rectus; erit, per quartam Primi, F A æqualis F B, quapropter & ipsi F C. Tribus igitur F A, F B, & F C æqualibus, erit F Centrum Circuli, Quod fuit constitutum.



Sed & id constabat ex primo capite trigesimæ Tertij, vt nos illic probauimus.

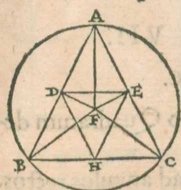
Sed sit Triangulum Amblygonium, cuius angulus A obtusus.

Diuido latus B C bipartitò in puncto H. A quo ad media puncta D & E, duco lineas H D & H E. Et erit H D æquidistans A C: & H E æquidistans A B, vt paulò antè ostendimus. Quapropter vterque angulorum B D H & C E H, æqualis angulo A: ob idq;, obtusus



obtusus. Deductis itaque perpendicularibus à punctis D & E : vtraque ipsarum secabit latus B C : & protractæ concurrent, vt ad punctum F, intellecta linea D E, per quintam Petitionem. Iam à puncto concursus F, duco lineas F A, F B, & F C : quæ, per quartam Primi, erunt æquales : si comparauerimus duo latera A D & D F, Trianguli A D F, duobus B D & D F, Trianguli B D F : deinde duo A E & E F, Trianguli A E F, duobus C E & E F, Trianguli C E F. Quare F Centrum Circuli, vt priùs.

Sit iam A B C Oxygonium. Ac diuisis tribus lateribus, vt in superioribus, per æqualia in punctis D E H : connecto D E, D H, & E H. Eritq; , vt priùs, D H æquidistans A C : & E H, æquidistans A B : ob idq; , per vigesimamnonam Primi, vterq; angulorum B D H & C E H, æqualis angulo A : sicq; acutus. Ductis igitur perpendicularibus, D F quidem ad A B, & E F ad A C, quæ concurrent intra Triangulum A B C ad punctum F : connectantur F A, F B, & F C. Quæ, per quartam Primi bis sumptam, vt in superioribus, erunt æquales. Quare F, vt priùs, erit Centrum Circuli, Quod erat faciendum.

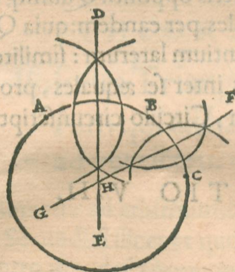


Modi igitur omnes in primum recidunt : nempè vt diuisis duobus lateribus Trianguli bifariam, ducantur à duobus punctis diuisionum perpendiculares : & in concursu ambarum statuatur Centrum Circuli.

Hinc manifestum est, Triangulum, cuiusmodicunque sit, id priuilegij habere, quòd ipsi Circulo inscribi & circunscribi possit. In Circulis autem inscribendis, diuiduntur anguli : circunscribendis, latera.

Ex eadem hac depromptum est compendium illud artificibus vsitatum,

Per tria data puncta in directam lineam minimè constituta, Circulum ducere.



Vt, si sint tria puncta A, B, & C : hæc intelliguntur esse connexa per lineas rectas in Triangulum : diuiditurq; bifariam spatium inter A & B : itidem spatium inter B & C : & educuntur à punctis diuisionum, duæ perpendiculares : quales hoc loco sunt D E & F G, secantes se in H Centro. Quod fit Circuli officio : sicut antè demonstrauimus, ad vigesimamquartam Tertij.

Consectarium.

Si fuerit Triangulum Orthogonium : cadit Centrum Circuli in medium latus recto angulo oppositum : si Ambligonium, extra Triangulum : si Oxygonium, intra. Si verò Centrum in medium latus ceciderit, Orthogonium est Triangulum : si extrinsecùs, Amblygonium : si introrsùm, Oxygonium.

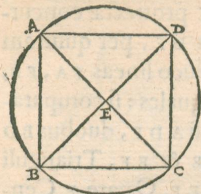
Quod manifestum est, ex ijs, quæ iam demonstrata sunt.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO VI.

In dato Circulo Quadratum describere.

Sit datus Circulus A B C D, cuius Centrum E. Volo in ipso Circulo Quadratum inscribere.

Duco duas Diametros se ad angulos rectos secantes in E Centro: quarum extrema connecto quatuor lineis A B, B C, C D, & D A. Dico A B C D esse Quadratum.



Erunt enim, per quartam Primi, quatuor latera æqualia: quum sint bases quatuor laterum æqualium, quæ à Centro ad Peripheriam exeunt, æqualesq; angulos qui ad E, continent. Et vnusquisque quatuor angulorum A, B, C, D rectus, per primam partem trigesimæ Tertij: quum sint in Semicirculo. Quadratum igitur est A B C D, Quod erat faciendum.

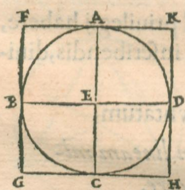
QVI à Centro originem Quadrati ducunt, duas lineas ad angulos rectos se scindentes, hinc inde ad Peripheriam continuant, & quatuor bases connectunt. Ac tum per semirectos ratiocinantur. Quod in idem recidit.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO VII.

Circa datum Circulum, Quadratum describere.

Sit datus Circulus A B C D, cuius Centrum E. Circa hunc volo Quadratum describere.

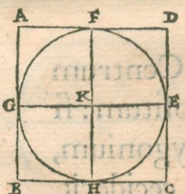
Duco duas Diametros A C & B D, se scindentes in Centro E ad angulos rectos. Tum per quatuor ipsarum extrema A, B, C, D, duco quatuor perpendiculares F G, G H, H K, & K F, sibi inter se occurrentes ad quatuor puncta F, G, H, K. Eruntq;, per vigesimamoctauam Primi, F G & H K inter se, & ipsi A C æquidistantes: quum in ipsas cadat B D vtrinque ad angulos rectos. Itidem F K & G H, inter se & ipsi B D æquidistantes: Quapropter, ex trigesimaquarta eiusdem bis sumpta, erunt quatuor anguli F, G, H, K recti, quia rectis oppositi. Quumq; duæ F G & H K sint Diametro A C æquales, per eandem: quia Quadrilatera F C & A H, sunt æquidistantium larerum: similiter & duæ F K & G H, Diametro B D æquales: erunt omnes inter se æquales, propter æqualitatem Diametrorum. Quare F G H K Quadratum, Circulo circunscriptum, Quod erat faciendum.



PROBLEMA 8, PROPOSITIO VIII.

In dato Quadrato, Circulum describere.

Sit datum Quadratum A B C D, intra quod describendus sit Circulus.

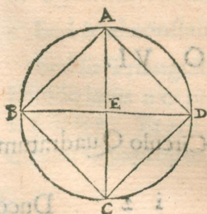


Diuido quatuor ipsius latera æqualiter in punctis E, F, G, H: ducta G E parallelo & æquali ipsis A D & B C: itemq; F H parallelo & æqualis ipsi A B & C D: quæ secet G E in puncto K: Quod dico esse Centrum Circuli.

Sunt enim quatuor dimidia K E, K F, K G, & K H, per trigesimãquartam Primi, æqualia quatuor dimidijs lateribus ipsius Quadrati: ob id, & inter se æqualia. Quare, per nonam Tertij, K est Centrum Circuli inscribendi, Quod erat constitutum.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO IX.

Circa datum Quadratũ, Circulũ describere.



Sit datum Quadratum A B C D, circa quod describendus sit Circulus.

Duco duas Diametros A C & B D, secantes se in puncto E: idq; æqualiter, per sextam Primi: quia bini quique anguli qui ad A, B, C, D sunt semirecti, per quintam & trigesimamsecundam

dam

dam eiusdem. Quare E est Centrum Circuli circunscribendi, Quod erat faciendum.

SVB has Quadrati & Circuli mutuas inscriptiones visum est adscribere peruulgatum hoc Theorema,

Quadratum Circulo circunscriptum, duplum est Quadrati eidem Circulo inscripti.

Sit Quadratum A B C D circunscriptum Circulo E F G H, cuius Centrum K: sintq; puncta contactuum, E, F, G, H. Et ductis duabus Diametris E G & F H, inscribatur ipsi Circulo, per sextam huius, Quadratum E F G H. Dico A B C D Quadratum, esse duplum ipsius E F G H Quadrati.

Nam quum latus A B maioris Quadrati, sit, per trigesimamquartam Primi, æquale F H Diametro Quadrati minoris: Quadratum autem ipsius F H duplum sit Quadrati cuius est Diameter, scilicet Quadrati E F G H, per quadragesimamseptimam Primi: erit & Quadratum ipsius A B, quod est A B C D, duplum Quadrati E F G H, Quod erat ostendendum.

POSSET alijs expositionibus demonstrari, vt ex æqualitate Triangulorum & Quadratorum: Sed nos hac vna contenti fuimus facili & compendiosa ostensione. Hoc autem Theorema ab Euclide non fuit appositum, fortasse quòd sola Problemata in hoc Quarto libro tractaret: fortasse etiam quòd de aliarum Figurarum proportione tradendum fuisset: quanuis tamen hanc ordinis rationem non seruet. Paucas enim Figuras Circulo inscribere docet, cæteras prætermittit: infinitatem quidem deuitans, sed & difficultate deterritus. Idipsum verò, vt cuius consideratio esset vsitata, hîc apponere non dubitauimus.

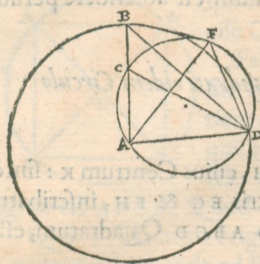
THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Isosceles Triangulum constituere, habens vtrunque eorum qui ad basin sunt angulorum, duplum anguli qui ad verticem.

Sumatur ad arbitrium, linea A B: quæ sic diuidatur in puncto C vt docet vndecima Secundi: scilicet vt quod fit ex A B in B C, sit æquale Quadrato A C. Tum posito Centro in A, describatur interuallo A B, Circulus B D E B: In quo, per primam huius, accommodetur linea B D æqualis A C: Et connectantur D A & D C. Dico vtrunque angulorum A B D & A D B, Trianguli A B D, esse duplum anguli A.

Ac primùm satis constat Triangulum esse Isosceles quum duo A B & A D latera sint ex Centro: ac propterea duos angulos A B D & A D B esse æquales, per quintam Primi. Iam circa Triangulum A C D describo Circulum D C A D, per quintam huius. Et quia B D est æqualis A C: erit quod fit ex A B in B C, æquale Quadrato B D: ac propterea B D tangit Circulum, per vltimam Tertij. Et angulus C D B, per trigesimamprimam eiusdem, æqualis est angulo alterno C A D. Posito itaque cõmuni angulo C D A, erit totus B D A angulus, æqualis duobus C A D & C D A. At angulus B C D, per trigesimamsecundam Primi, æqualis est iisdẽ C A D & C D A, duobus interioribus oppositis. Erit igitur B C D toti B D A æqualis: ob id, & ipsi A B D. Quare, per sextam Primi, linea C D æqualis lineæ B D: ob id, & lineæ C A. Angulus igitur C D A, per quintam Primi, æqualis est angulo C A D: ob idq;, angulo C D B. Duplus itaque est angulus B D A, anguli B A D: Quare & angulus A B D

duplus eiusdem, Quod erat faciendum.



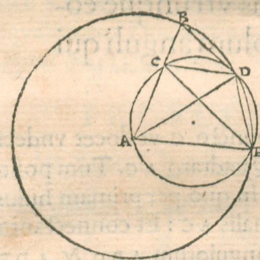
APPENDIX Campani. Forsan contendet aliquis Circulum A C D secare Circulum B D E in puncto aliquo Arcus B D, simulq; secare lineam B D: quò fiet vt B D linea non sit Circulo A C D applicata: vt in Demonstratione astruitur, sed ipsum secans.

Secent igitur inter se, si fieri possit, ducaturq; à puncto B, linea B F tangens Circulum A C D: Et connectantur F A & F D. Eritq;, per trigesimamquintam Tertij, quod fit ex A B in B C, æquale Quadrato B F: ob idq;, B F æqualis B D: Vnde, per quintam Primi, angulus B F D æqualis angulo B D F. Et quia, per trigesimamprimam Tertij, angulus B F A, est æqualis angulo A D F alterno: erit angulus B D F maior angulo A D F, pars toto.

Refellit & idem aliter. Nam si fortè dicatur Circulus A C D secare lineam B D, neque tamen secare Arcum B D maioris Circuli: Secet ipsam, si possit, in puncto H. Eritq; quod fit ex A B in B C, æquale ei quod fit ex D B in B H, per trigesimamquintam Tertij: quum vtraque B A & B D ab eodem puncto B, cadat ad sectionem Circuli. Et quia quod fit ex A B in B C, æquale est Quadrato B D: erit quod fit ex D B in B H, æquale eidem Quadrato D B: repugnante secunda Propositione Secundi.

Sed hæc frustrà in dubitationem adducuntur à Campano. Linea enim B D non tantùm astruitur in Demonstratione tangere Circulum A C D, sed etiam probatur.

AT notabilius est quod ipse subijcit, Duos Circulos A C D & B D E se mutuò secare: & Circulum A C D abscindere à Circulo B D E Arcum æqualem Arcui B D: Circulum verò B D E, abscindere à Circulo A C D Arcum æqualem Arcui D C.



Prior pars constat ex eo, quòd si minor non secet maiorem, sed tangat ipsum in puncto D: erit, per vndecimam Tertij, Centrum vtriusque in linea vna, scilicet in A D: propterea quòd in ipsa est Centrum maioris, & in eadem punctum contactus. Erit igitur angulus A C D, per trigesimam Tertij, rectus: &, per decimamtertiam Primi, angulus D C B rectus: sicq; A B D rectus, vt potè huic æqualis, Quod, per trigesimamsecundam Primi, fieri non potest.

Secabunt igitur inter se, vt in punctis D & E. Dico iam Arcum E D maioris, esse æqualem Arcui D B: & Arcum E D minoris, æqualem Arcui D C.

Connecto E A, E C, & E D. Eruntq;, per vigesimamsextam Tertij, quatuor anguli D E C, C E A, E A C, & A D C, æquales: quum sint Arcus C A & C D æquales, per vigesimamseptimam eiusdem. Totus itaque angulus A E D duplus est anguli B A D: ob idq;, æqualis vtrique angulorum A B D & A D B. Et quia angulus A E D æqualis est angulo A D E, per quintam Primi, quoniam A D & A E sunt à Centro: erunt duo anguli E & D, Trianguli A E D, æquales duobus angulis D & B, Trianguli A D B: ob id, per trigesimamsecundam Primi, reliquus angulus A vnius, æqualis reliquo angulo A alterius. Quare, per vigesimamsecundam Tertij, Arcus E D maioris, æqualis Arcui D B: Et, per eandem, Arcus E D minoris, æqualis Arcui D C, Quod erat probandum.

SVPER hæc, obseruandum, In omni Triangulo, quale hoc loco est A B D, angulum verticis, vt hìc angulum A, esse vnam tertiam cum vna quinta vnius tertiæ recti:

recti: hoc est, duas quintas vnius recti: ac breuiter, vnam quintam duorum rectorum. Vtrunque verò angulorum qui ad basin, esse duas quintas duorum rectorum. seu quatuor quintas vnius recti. Quod clarum est, diuisis duobus angulis rectis in partes quintas. Tum enim in Triangulo, angulus verticis erit vnius quintæ: & vteruis duorum qui ad basin, duarum quintarum. Hæc autem diuisio lineæ AB, qualis est in puncto C, dicetur ab Euclide in trigesima Sexti, proportio secundùm mediam & extremam rationem: vtpotè quum AC sit medium proportionale inter BC & BA. In qua quidem, numerus Quinarius præcipuam habet vim. Nam in omni quantitate quæ sic diuiditur, Quadratum totius iungitur cum Quadrato dimidiæ: Quod aggregatum perpetuò est quintuplum Quadrati ipsius dimidiæ. Id verò ex ea quam proposuimus specie in vndecima Secundi, repetemus. Sint 8 diuidenda sicut proponitur. Duco 8 in se, fiunt 64: Duco etiam eius dimidium nempè 4, quanta est illìc linea DE aut EB, in se: fiunt 16. Hæc iuncta, scilicet 64 & 16 faciunt 80, quintuplum 16. Itaque ad huiusmodi Triangulum inuestigandum, opus fuit tali diuisione lineæ: cui præest Quinarius numerus. Hoc igitur Problema ad Pentagonum Circulo inscribendum spectat: vt in sequenti Propositione docetur.

ATQVE animaduertendum, lineam AC, esse latus Pentagoni æquilateri, Circulo ACD inscribendi. Quod sic demonstratur,

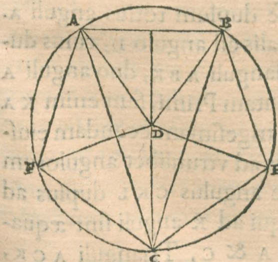
Ex posteriori constructione constitit, tres Arcus AC, CD, & DE minoris Circuli, esse æquales. Quumq; ex eadem constiterit duas lineas AD & AE esse æquales: erit & Arcus AE æqualis Arcui AD, per vigesimamseptimam Tertij: quapropter eorũ dimidia æqualia. Si igitur AE diuidatur æqualiter, erit tota Peripheria ACDEA diuisa in quinque Arcus æquales. Quorum quum subtensæ sint æquales, per vigesimamoctauam eiusdem: erit vnaquæque illarum latus Pentagoni, Quod erat demonstrandum. Et erit idem AC, latus Decagoni, Circulo BDE inscribendi: quod ad sequentes Demonstrationes pertinet. In summa, hæc omnia ex Proportionibus dependent. Et vt nostrum de hac tota re iudicium ingenuè explicemus, huic tractationi Proportiones erant præmittendæ.

Nos huic loco hoc subnectemus Problema.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum constituere.

Sit super data linea AB constituendum Pentagonũ æquilaterũ & æquiangulum.

Super ipsa AB constituo, per vigesimamtertiam & trigesimamsecundam Primi, Triangulum Isosceles ABC, quale proponit hæc decima: vt scilicet super basi AB, duo anguli CAB & CBA, sint æquales duobus modò constructis: nempè vterque duæ quintæ duorum rectorum, & angulus verticis C vna quinta eorundem. Diuido postmodùm angulum C æqualiter, ducta linea CD: Ac super puncto A constituo angulum CAD, æqualem angulo ACD: ducta linea AD, quæ concurrat cum CD ad punctum D: idq; intra Triangulum ABC: nam CD protracta cadet in basin AB, & AD in latus BC. Tum connecto DB.



Et quia in Triangulo ACD, duo anguli A & C sunt æquales: erunt, per sextam Primi, duo AD & CD latera æqualia. Rursus quia duo latera CB & CD, Trianguli CBD, sunt æqualia duobus CA & CD, Triãguli ACD, & angulus C huius, æqualis angulo C illius: erit, per quartam Primi, basis DB basi DA, sicq; lineæ DC, æqualis. Erit igitur, per nonam Tertij, D Centrum Circuli. Et ducatur Circulus ABECF. Iamq; angulus ADB duplus est anguli ACD, per decimamnonam Tertij: Ipse igitur ADB angulus facit duas quintas duorũ rectorum: hoc est, vnam quintam quatuor rectorum. Quum itaque spatium circa D Centrum,

ſit æquale quatuor rectis angulis: omninò diuidetur ſpatium ipſum in quinque angulos, æquales ipſi A D B, nempè in quinque quintas: ductis lineis D E & D F, quæ cum D A, D B, & D C æqualitatem quinariam diſtinguant. Connexiſq; A F, F C, C E, & E B, erit Rectilineum A B E C F, Pentagonum æquilaterum, per legem Centri & Peripheriæ, adhibita quarta Propoſitione Primi: Et æquiangulum, per quartam & quintam eiuſdem: quum quinque anguli A, B, E, C, F, diuidantur in decem æqualia, Quod erat faciendum.

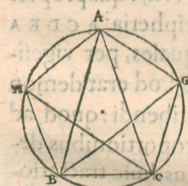
Hoc Problema Bouillus ideò difficile putauit, quòd ab Euclide eſſet prætermiſſum. Sed & cæteras Figuras quarum poſteriùs inſcriptio demonſtranda eſt, ſuper data linea facilè conſtruet, qui hanc noſtram perſpexerit Demonſtrationem.

PROBLEMA II, PROPOSITIO XI.

In dato Circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

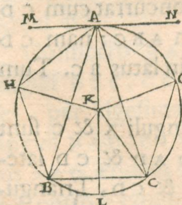
Sit datus Circulus A B C, cui inſcribendum ſit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

Conſtruatur Triangulum Iſoſceles D E F, quale præſcripſit antecedens Propoſitio: Et in dato Circulo inſcribatur Triangulum A B C, ipſi D E F æquiangulum, per ſecundam huius: vt ſcilicet vterque angulorum B & C duplus ſit ad angulum verticis A. Horum vtrunque diuido æqualiter, ductis lineis B G & C H hinc atque hinc ad Peripheriam.



Eritq; totus Circulus in quinque Arcus diuiſus, in punctis A, H, B, C, G: eoſq; æquales, per vigeſimamquintam Tertij, propter æqualitatem quinque angulorum qui in ipſos cadunt: quorum quatuor ad baſin Trianguli A B C: quintus verò ad verticem A. Connexis itaque A H, H B: A G, & G C: erit Pentagonum A H B C G Circulo inſcriptum, æquilaterum, per vigeſimamoctauam Tertij, propter æqualitatem Arcuum quos quinque latera ſubtendunt: Et æquiangulum, per vigeſimamſextam eiuſdem: proptereà quòd quinque Arcus A B, H C, B C, C A, & G H in quos anguli ipſius Pentagoni cadunt, ſunt æquales: quum ipſorum dimidia ſint æqualia. Sicq; conſtat Propoſitio.

Aliter. Constructo Triangulo D E F in ſpeciem antecedentis Propoſitionis, ſit Centrum K ipſius Circuli propoſiti A B C: & ſuper Centro conſtituatur angulus B K C, æqualis alterutri angulorum E aut F, Trianguli D E F: connectaturq; B C. Dico B C eſſe latus Pentagoni.



Diuido angulũ K æqualiter, ducta Diametro A K L. Tum connecto B A & C A. Et conſtat, ex decimanona Tertij, angulum K eſſe duplum totius anguli A. Igitur totus A angulus æqualis eſt angulo D, cuius duplus eſt ipſe K. Et quia Trianguli A B K, duo anguli A & B ſunt æquales, per quintam Primi, ſunt enim K A & K B à Centro: erit, per trigeſimamſecundam eiuſdem, angulus B K L duplus ad vtrunlibet angulorum K A B & K B A, exterior interiori: Atque eadem ratione angulus C K L duplus ad vtrunlibet duorum K A C & K C A. Itaque quum ambo qui ad K anguli ſint æquales, erunt duo anguli A & B, Trianguli A B K, duobus A & C, Trianguli A C K, mutuò æquales: ob idq;, per vigeſimamſextam Primi, duæ baſes A B & A C æquales. Triangulum igitur A B C Iſoſceles. Quumq; angulus totus A, æqualis ſit angulo D: erunt duo reliqui anguli A B C & A C B, per trigeſimamſecundam Primi, duobus

bus reliquis E & F æquales. Quare Triangulum ABC, Triangulo DEF æquiangulum. Ac iam procedet Demonſtratio vt modò inſtituta fuit: intellectis ſcilicet BG & CH lineis.

Hanc Demonſtrationem adſcripſimus, vt oſtenderemus, inſcribendarum in Circulis Figurarum rationem à Centro & Diametro pendêre. Vt etiam intelligeremus, duos angulos qui ad K, Trianguli BCK, ſuper Centro incumbentes, eſſe cognitos. Quod in Heptagono Bouillus non putat. Sed vtinam tam facilis eſſet Heptagoni inuentio, quàm ipſi ſunt noti.

Atque hoc loco iucundum eſt intueri Triangulorum varietates. Vterque enim angulorum qui ad A, efficit quintam vnius recti: vnde emergit latus Decagoni eidem Circulo inſcribendi: vt conſtat intellectis lineis BL & LC. Arcus enim BC diuiditur in duo æqualia in puncto L, per vigeſimamquintam Tertij.

Ex Trianguli itaque æquilateri inſcriptione, notum fit Hexagonum: ſicq; ſemper ex ſimplici numero laterum, cognoſcitur duplum: vt ex Quadrato Octogonum: ex Octogono Sedecangulum: ac ſic continenter in cæteris. Immò etiam ex hac noſtra Demonſtratione ſtatim innoteſcit Pentagoni circunſcriptio: vt in ſequenti apparebit.

ALITER rurſus poterimus variare Pentagoni inſcriptionem. Sit Circulus quem modò exhibuimus, ABC: maneatq; Triangulum ipſum DEF. Duco ad Circulum, lineam MAN tangentem ipſum, per decimamſextam Tertij: Et ad punctum A, conſtituo angulum MAB æqualem alteri angulorum E aut F (quem ſatis conſtat eſſe minorem recto): ducta linea AB quæ ſecet Peripheriam in puncto B. Rurſus ad idem punctum A, conſtituo angulum NAC æqualem ipſi MAB: ducta linea AC, quæ ſecet Peripheriam in C. Et connecto BC. Dico BC eſſe latus Pentagoni. Quod patet diuiſo Arcu AB per æqualia in puncto H, ductiſq; AH & BH: itemq; diuiſo Arcu AC per æqualia in G, ductiſq; AG & CG. Sumpto enim Quadrangulo ABCG, conſtat, ex trigeſimaprima Tertij, angulum ABC æqualem eſſe angulo NAC alterno: ob id, & angulo E. Similiter ſumpto Quadrangulo ACBH, erit angulus ACB æqualis angulo MAB alterno: ob id, & angulo F. Quare, per trigeſimamſecundam Primi, erit, vt priùs, Triangulum ABC, ipſi DEF Triangulo æquiangulum: & procedet Demonſtratio vt in ſuperioribus.

SED & conſtituto ad Peripheriam angulo B, triplo anguli D, ductis lineis AH & BH, erit vtraque ipſarum AH & BH latus Pentagoni: ſicut intelligent ij qui ex comparatione angulorum ratiocinari volent. Nam in priori ſpecie, duo anguli B & C Pentagoni, ad Peripheriam, in tres angulos æquales diuiduntur: quorum ſinguli ſunt æquales angulo D. Huiuſmodi autem Demonſtrationes articulatim non exponimus, quò breuitati conſulamus: ac ſatis nobis eſt, ſi eas vtcunque informatas ex aliarum argumento, ſtudioſis examinandas relinquamus. In hac enim Figurarum inſcriptione tam latè patet ſpeculandi campus, vt ſingula aſſequi meditando nemo vnquàm poſſit. Quanquam nos initio cum Campano rem non admodùm vtilem eſſe putabamus. Quum verò attentiùs exploraremus quò ſpectaret hæc tam ordinata tamq; artificioſa conſtitutio: ſanè comperimus non fruſtrà creditum eſſe, Figuras quantò propius ad Circuli compoſitionem accedunt, tantò perfectiores eſſe. Res igitur hæc tanta eſt, quanta fortaſsè in toto opere Geometrico nulla: ſicut nos aliquando oſtendemus propriâ commentatione, ſi noſtris inuentis quæ in Geometria quotidie molimur, ſummus ille Geometer annuerit. Ex hac enim materia, nouum velut opificium & hactenus non excogitatum exurgit.

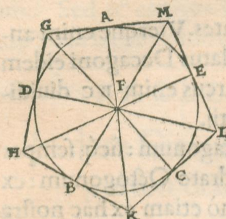
PROBLEMA 12, PROPOSITIO XII.

Circa datum Circulum, Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit Circ

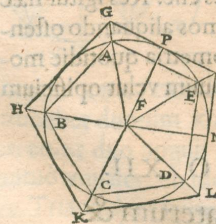
Sit Circulus A B C, cuius Centrum F, cui circunſcribendum ſit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

Diuido Peripheriam totam in quinque æqualia, per antecedentem, in punctis A, D, B, C, E. Et à Centro F educo quinque lineas, F A, F D, F B, F C, & F E: ad quas hincinde duco quinque perpendiculares: Quæ concurrent in punctis G, H, K, L, M, tangentq; Circulum, per Conſectarium decimæquintæ Tertij. Tum ad puncta concurſus ipſarum, duco à Centro lineas F G, F H, F K, F L, F M. Et quia G A & G D ab vno puncto cadunt in Circulum: ipſæ erunt æquales, per ea quæ demonſtrauimus ad Trigeſimamquintam Tertij. Atque eadem ratione erit H D ipſi H B æqualis: & K B ipſi K C: ſicq; ordinatim. Et quoniam quinque Arcus A D, D B, B C, C E, & E A ſunt æquales: erunt, per vigeſimamſextam Tertij, quinque anguli qui ad Centrum, A F D, D F B, B F C, C F E, & E F A, æquales. Et quia duo latera A G & F A, Trianguli F G A, ſunt æqualia duobus D G & F D, Trianguli F G D, & latus G F commune: erunt, per octauam Primi, duo ipſorum anguli qui ad F, inter ſe: duoq; anguli qui ad G, inter ſe quoque æquales. Similiter erunt duo anguli qui ad F, Triangulorum D F H & H F B, inter ſe: duoq; qui ad H, inter ſe æquales. Sicq; trium reliquorum Triangulorum B F C, C F E, & E F A, ſinguli diuidentur per æqualia, lineis F K, F L, & F M: eruntq; decem anguli qui ad Centrum, æquales. Quoniam igitur duo anguli A & F, Trianguli G A F, ſunt æquales duobus angulis A & F, Trianguli M A F, latusq; A F commune: erit, per vigeſimamſextam Primi, angulus G vnius, æqualis angulo M alterius: latusq; G A, æquale lateri A M. Eadem ratione erit angulus G, Trianguli G F D, æqualis angulo H, Trianguli D F H: latusq; G D æquale lateri D H. Quum itaque G A ſit dimidium G M, & G D dimidium G H: ſintq; G A & G D æqualia: erunt, per animi Notionem, G M & G H eorum dupla, æqualia.



Similiter probabimus G M, M L, L K, & K H eſſe æqualia. Quare Pentagonum G H K L M, æquilaterum. Sed & æquiangulum. Quum enim duo anguli qui ad G, probati ſint æquales: duoq; qui ad M, æquales: & G dimidius, æqualis M dimidio: erit totus G, toti M æqualis. Atque eadem ratione reliqui anguli ipſius Pentagoni probabuntur æquales, Quod erat faciendum.

ALITER ex Parallelis. In Circulo A B C, cuius Centrum F, inſcribo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E, ſicut docet antecedens: per cuius quinque angulos duco à Centro vltra Peripheriam, quinque lineas F G, F H, F K, F L, & F M. Et conſtat quinque angulos qui ad F Centrum, eſſe æquales: quum latera quinq; intrinſecus Triangulorum ſint æqualia, & baſes æquales. Conſtat etiam quinq; angulos Pentagoni, qui ad Peripheriam, eſſe diuiſos in decem angulos æquales, per quartam Primi. Duco itaque inter duas lineas F G & F H, lineam G H, parallelum lateri A B, & tangentem Circulum A B C, per ea quæ docuimus ad decimamſextam Tertij: atque huic ſimiles duco H K, K L, & L M, ſingulis lateribus B C, C D, & D E parallelos.



Et quoniam F G cadit in duas parallelos A B & G H, erunt duo anguli F G H & F H G, duobus F A B & F B A mutuò æquales, per ſecundam partẽ vigeſimænonæ Primi: ob idq;, inter ſe æquales. Et per ſextam igitur Primi, duæ lineæ F G & F H æquales. Eadem ratione erunt duo anguli F H K & F K H, duobus F G H & F H G mutuò æquales: & F K æqualis F H: quapropter & ipſi F G. Quum itaque anguli qui ad F, ſint æquales: erit, per quartam Primi, baſis H K baſi G H æqualis. Similiter probabuntur tres lineæ F K, F L, & F M, æquales duabus F G & F H: Duæ item baſes K L & L M, æquales duabus

G H &

G H & H K: Et anguli quos cum ipsis F K, F L, & F M faciunt, æquales inter se. Iam connecto quintam lineam M G: quæ erit æqualis quatuor prioribus, per ipsam quartam Primi: quum duæ lineæ F G & F M probentur æquales: sitq; angulus G F M æqualis vnicuique angulorum qui ad F. Hæc etiam tangit Circulum. Ad punctum enim contactus ipsius L M cum Circulo, quod sit N, duco F N. Et cōstat, ex decimaseptima Tertij, vtrunque angulum qui ad N, esse rectum. Quapropter quum angulus L, Trianguli F L N, sit æqualis angulo M, Trianguli F M N: & angulus N vnius, æqualis angulo N alterius: & F N vtrique communis: erit, per vigesimamsextam Primi, N L æqualis N M: sicq; L M diuisa æqualiter in puncto N. Et quoniam tria latera Trianguli F G P, sunt æqualia tribus lateribus Trianguli F M P: erit angulus P vnius, æqualis angulo P alterius, per octauam Primi: quapropter vterque rectus, per decimamtertiam eiusdem. Quum itaque duo anguli F M P & F P M, Trianguli F M P, sint æquales duobus angulis F M N & F N M, Trianguli F M N: & latus F M vtrique commune: erit F P æqualis F N. Sed F N est à Centro ad Peripheriam. Et erit igitur F P à Centro ad Peripheriam. Quumq; M G sit ad E P perpendicularis: ipsa, per Consectarium decimæquintæ Tertij, contingit Circulum. Quare G H K L M Pentagonum circunscriptum Circulo, æquilaterum: Quod & æquiangulum probatum est, ex æqualitate dimidiorum: sicut facere oportuit.

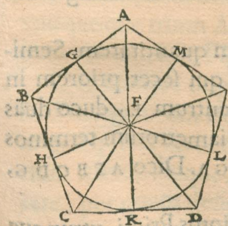
Atque hæc Demonstratio quanuis amplior videatur, tamen ipso intuitu sese explicat.

PROBLEMA 13, PROPOSITIO XIII.

In dato Pentagono æquilatero & æquiangulo Circulum inscribere.

Sit datum Pentagonum A B C D E æquilaterum & æquiangulum, in quo describendus sit Circulus.

Duos angulos ad vnum quempiam laterum ipsius Pentagoni adiacētes, vt A & E, diuido æqualiter, ductis lineis A F & E F: Quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F. A quo ad vnumquodque laterum Pentagoni, duco quinque perpendiculares F G, F H, F K, F L, & F M. Tum ad duos angulos hinc indè proximos B & D, duco F B & F D. Et quia duo anguli A & M, Trianguli A F M, sunt æquales duobus angulis A & G, Trianguli A F G: & latus A F commune: erit, per vigesimamsextam Primi, F M æqualis F G. Ac similiter, per eandem, erit F L æqualis F M, sumptis duobus Triangulis E F L & E F M. Rursus quum duo latera A B & A F, Trianguli A B F, sint æqualia duobus A E & A F, Trianguli A F E: & angulus A vnius, æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, angulus A B F æqualis angulo A E F. Et quia totus B toti E est æqualis, & E diuisus æqualiter: erit & B diuisus æqualiter. Eadem ratione probabitur totus B æqualiter diuisus: sumptis Triangulis E A F & E D F. Quia ergo duo anguli G & B, Trianguli G F B, sunt æquales duobus angulis H & B, Trianguli H F B, & latus F B commune: erit, per vigesimamsextam Primi, F H æqualis F G. Eadem ratione probabitur F K æqualis F L, sumptis Triangulis L F D & K F D. Quum igitur quinque lineæ F G, F H, F K, F L, & F M sint æquales: erit F Centrum Circuli, per nonam Tertij. Qui secundùm ipsarum quantitatem descriptus, tanget latera Pentagoni, per primam partem decimæquintæ Tertij, Quod erat faciendum.



INITIO constructionis præmonstrat Campanus, lineas A F & E F, diuidentes duos angulos A & E, concurrere intra Pentagonum. Sed hoc constabat ex antecedentis compositione: in qua F G & F H, ad Centrum F terminatæ, probabantur æquales

les. Nam ex huiusmodi constructionibus Consectaria colligi solent. Quod ex prima Tertij, & decimaquinta eiusdem, moxq́; ex decimaquinta huius, alijsq́; Propositionibus satis multis videre est. Sicut etiam ex hac sequitur, immò ex antecedente: Lineas perpendiculares à punctis medijs laterum Pentagoni eductas, per Centrum Circuli transire, angulosq́; oppositos æqualiter diuidere. Vt hoc loco, A K est linea vna, diuidens angulum A, latusq́; C D æqualiter: ac reliquæ in eundem modum. Quod sic ostenditur.

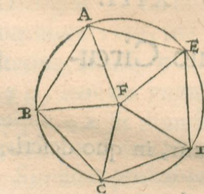
Spatium illud circa Centrum F, æquale est quatuor rectis: qui in decem æquales diuiduntur, decem lineis in F conuenientibus. Quinque igitur anguli A F M, M F L, E F L, L F D, & D F K sunt duobus rectis æquales. Quapropter A F & F K, per decimamquartam Primi, vnam lineam efficiunt. Eadem & de cæteris lineis erit probatio. Atque hoc in omnibus Figuris æquilateris imparium laterum est perpetuum.

PROBLEMA 14, PROPOSITIO XIIII.

Circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum, Circulum describere.

Sit circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E, describendus Circulus.

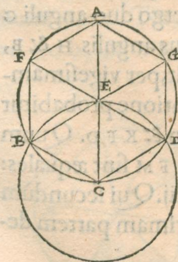
Duos angulos A & E diuido in duo æqualia, ductis lineis A F & E F: quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F, vt anteà probauimus. Tum ab ipso puncto F, ad reliquos angulos duco lineas F B, F C, & F D. Et quia duo latera A F & A B, Trianguli A B F, sunt æqualia duobus lateribus A F & A E, Trianguli A E F, & angulus A vnius æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, F A æqualis F E: & angulus A B F æqualis angulo A E F. Quumq́; totus B, toti E sit æqualis: erit B diuisus in duo dimidia. Atque eadem ratione vterq; angulorum C & D diuisus in duo dimidia: ob id, quinque lineæ F A, F B, F C, F D, & F E æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Centrum Circuli, Pentagono A B C D E circunscribendi, Quod faciendum fuit.



PROBLEMA 15, PROPOSITIO XV.

In dato Circulo, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus Circulus A B C D, cuius Centrum E, cui inscribendum sit Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.



Duco Diametrum A E C: & secundùm quantitatem Semidiametri E C, describo Circulum E B D: qui secet priorem in duobus punctis B & D. A quibus, per Centrum E, duco duas B E G & D E F Diametros. Trium verò Diametrorum terminos cõiungo sex lineis A F, F B, B C, C D, D G, & G A. Dico A F B C D G, esse Hexagonum quale proponitur.

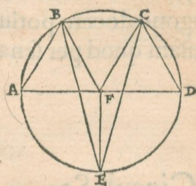
Erit enim ex Themate primæ Propositionis Primi, vtrunque Triangulorum B E C & C E D æquilaterum: & per quintam eiusdem, æquiangulum. Duo igitur anguli B E C & C E D cum tertio quopiam æquali, efficient, per trigesimamsecundam eiusdem, duos rectos: quum vterque sit tertia pars duorum rectorum. Et quia ijdem B E C & C E D: cum angulo D E G, efficiunt duos rectos, per decimãtertiam eiusdem,

erit D E G æqualis vtrique illorum. Sunt itaque ſex anguli qui ad E, æquales. Et ſex igitur Arcus quos comprehendunt, æquales: per vigeſimamquintam Tertij: Quapropter & ſex illorum ſubtenſæ æquales, per vigeſimamoctauam eiuſdem. Æquilaterum igitur Hexagonum. Sed & æquiangulum, per vigeſimamſextam eiuſdem: propterea quòd Arcus in quos cadunt, æquales ſunt: nempe ſinguli ſexta pars Peripheriæ, Quod fuit conſtitutum.

ALITER. Sit in Circulo A B C D E, cuius Centrum F, deſcribendum Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.

A Centro F duco Semidiametrum F A. Tum ex puncto A, per primam huius, accommodo lineam A B æqualem ipſi Semidiametro: Quam dico eſſe latus Hexagoni æquilateri & æquianguli.

Connecto F B. Et quia A B eſt æqualis F A: eſt & æqualis F B. Triangulum igitur A F B æquilaterum, &, per quintam Primi, æquiangulum. Conſtituo poſtmodùm ſuper F Centro, angulum B F C æqualem angulo A F B, vel angulo F B A, quod perindè eſt, ducta linea F C: & connecto B C. Et quia A F B eſt tertia pars duorum rectorum, per quintam & trigeſimamſecundam Primi: erit & B F C tertia pars duorum rectorum. Quapropter duo reliqui F B C & F C B, quum ſint æquales, per quintam Primi, erunt duæ tertiæ duorum rectorum, per trigeſimamſecundam eiuſdem.



Vel, per quartam Primi, quum angulus B F C ſit æqualis F B A, duoq́, latera F B & F C ſint æqualia duobus A B & B F: erit baſis B C æqualis baſi B F: quapropter & ipſi F C. Triangulum igitur F B C æquilaterum & æquiangulum. Demùm conſtituo angulum C F D æqualem vtrique angulorum qui ad F poſiti ſunt, ducta linea F D: & connecto C D. Eritq́; iam ex poſita ratione, Triangulũ F C D æquilaterum & æquiangulum. Quumq́; tres anguli qui ad F, duobus rectis ſint æquales, eſt enim vnuſquiſq́; tertia pars duorum rectorum: erit, per decimamquartam Primi, A D linea vna: ob idq́;, Diameter Circuli. Alter igitur Semicirculus A F D, in tot partes æquales diuidetur, in quot A B C, totq́; æquales ſubtenſas comprehendet. Quare A B eſt latus Hexagoni æquilateri Circulo inſcribendi. Quod & æquiangulum erit: nam dimidium totius B, æquale eſt totius C dimidio, Quod fuit faciendum.

QVVM igitur duxerimus ab F Centro perpendicularem F E, & connexuerimus B E & C E: effecerimus Triangulum B E C: cuius angulus E qui ad verticem, erit ſexta pars duorum rectorum, per decimamnonam Tertij. Nam B F C angulus, ad ipſum duplus vterque verò duorum E B C & E C B angulorum ad baſin, erit duplus ſeſquiplex, ſeu duplus ſeſquialter, ad ipſum E angulum. Atque hæc erat ars inueniendi lateris Hexagonici. Duæ igitur Demonſtrationes modò inductæ, compendiariæ fuerunt.

Poterat etiam inſcribi Hexagonum ex Trianguli Æquilateri inſcriptione, diuiſo vnoquoque trium Arcuum per æqualia.

SED iam hoc Figurarum inſcribendarum negotium elucidemus.

Quæcunque imparium ſunt laterum Figuræ: eæ Circulo inſcribuntur adminiculo Triangulorum Iſoſcelium, quorum duo anguli qui ad baſin, multiplices ſint eius anguli qui ad verticem. Triangulum itaque Æquilaterum (quod eſt primum imparium laterum, atque, ob id, tot habet Priuilegia) ſeipſum explicat: idq́; habet ab Vnitate, per quam deſignatur. Conſtituto enim Triangulo Iſoſceli ad Peripheriam, cuius duo anguli qui ad baſin, æquales ſint angulo qui ad verticem (Æquale verò ſuiipſius multiplex eſt, vt Vnitas) ipſa baſis erit latus Trianguli Æquilateri Circulo inſcribendi. Ac ſic Æquilaterum, tanquam Iſoſceles conſideratur.

Pentagonum autem, quod eſt ſecundum imparium, reperitur officio Trianguli Iſoſcelis, cuius vterque angulus qui ad baſin, duplus ſit eius qui ad verticem: ſicut demonſtratum eſt in vndecima huius.

Heptagonum verò, per Triangulum, cuius vterque angulus qui ad basin, triplus sit eius qui ad verticem: Ennagonum, quadruplus: Vndecangulum, quintuplus: Tredecangulum, sextuplus: ac sic continenter.

PARIVM autem laterum Figuræ æquilateræ Circulo inscribuntur, officio Triangulorum Isoscelium, in quibus anguli qui ad basin, sint multiplices sesquiplices eius anguli qui ad verticem.

Vt Quadratum (primum parium laterum, atque eam ob causam etiam tot habet priuilegia) inscribitur Circulo: ex Triangulo Isosceli ad peripheriam collocato, cuius vterque angulus qui ad basin, sit sesquiplex, seu sesquialter, eius anguli qui ad verticem. Sed compendij caussa, aliter docuit Euclides in sexta huius. Hexagonum, secundum parium, officio Isoscelis cuius vterque angulus qui ad basin, sit duplus sesquiplex eius qui ad verticem: Octogonum triplus sesquiplex: Decagonum, quadruplus sesquiplex: sicq; in continuum, per Figuras parium laterum. Atque ex ijs innumerabiles abundant meditationes.

At verò imparium laterum Figuræ, ideò difficiliores cognitu, quòd pleræq; ipsarum per numeros Primos repræsententur: Quales sunt 3, 5, 7, 13, 17: ac similes. Sed de his aliâs vberiùs, vt antè polliciti sumus. Hæc tamen in Hexagono docere potius visum est, quòd ipsum sit maximè perspicuum: atque ob eam causam quod per senarium numerum significetur, qui primus est Perfectorum.

Consectarium.

Latus Hexagoni Circulo inscripti, æquale est Circuli Semidiametro.

Hoc verò satis constat ex vtraque Demonstrationum: maximè ex secunda, quæ per Triangula Æquilatera procedit, quorum latera sunt Semidiametri.

Ex Campano. Non proposuit Euclides, Circa datum Circulum, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum vt describatur: neque vt intra aut circa Hexagonum, Circulus: quòd satis esse putaret de Pentagono proposuisse: ex cuius comparatione, reliquæ species Æquilateræ Circulis acommodabuntur, atque iisdem Circuli. Illud insuper obseruandum, Omnem Figuram æqualium laterum Circulo inscriptam aut circunscriptam, æqualium quoque esse angulorum. De inscripta constat ex vigesimaseptima & vigesimasexta Tertij: sumptis binis quibusq; Arcubus contiguis, quos duo latera angulum continentia subtendunt. De circunscripta autem, ductis lineis à Centro Circuli ad omnes angulos ipsius Figuræ & ad puncta contactuum: sicut ex themate decimætertiæ huius ostenditur.

Hîc etiam animaduertemus, quod & suprà in quadragesimasexta Primi monuimus, in Figuris parium laterum lineas ab angulis per Centrum ad angulos duci: sed in Figuris imparium laterum, ab angulis per Centrum ad latera.

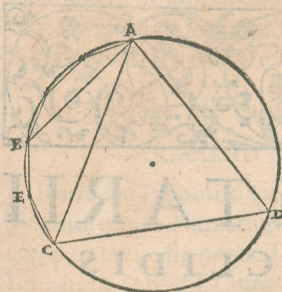
PROBLEMA 16, PROPOSITIO XVI.

In dato Circulo, Superficiem quindecim laterum æquilateram & æquiangulam inscribere.

Sit in dato Circulo ABCD inscribenda Superficies quindecangula æquilatera & æquiangula.

Intra Circulum, per doctrinam secundæ huius, & primæ eiusdem, applico latus Trianguli Æquilateri: quod sit AC: &, per vndecimam huiusce, latus Pentagoni, quod sit AB, in Arcu AC.

Qualium itaque segmentorum æqualium tota ABCD Peripheria est quindecim, talium Arcus ABC, tertia pars ipsius, erit quinque: & Arcus AB quinta pars eiusdem erit



erit trium : ob idq; , residuum B C, duorum æqualium. Secetur, per trigesimam Tertij, Arcus B C bifariam in E puncto. Et erit vterque Arcuum B E & E C, decimaquinta pars totius Peripheriæ. Si igitur coniunxerimus rectas B E & E C : fient duo latera Quindecanguli æquilateri. Et tales tres admittet Arcus A B, sicut astruximus : fientq; in Arcu A C, quinque decimæquintæ totius Peripheriæ. Qui quum sit tertia pars ipsius, reliquæ duæ tertiæ C D & D A, in tot tantasq; sectiones diuidentur: quarum subtensæ erunt latera Quindecanguli æquilateri, Quod erat faciendum.

SIMILITER autem vt in Pentagono, si per quindecim puncta diuisionum æqualium Circuli, duxerimus lineas tangentes: circa ipsum Circulum describetur Quindecangulum æquilaterum & æquiangulum: Atque insuper ijsdem, quibus illic, obseruationibus, dato Quindecangulo Circulum inscribemus & circunscribemus.

Libri Quarti Geometricorum Elementorum

FINIS.
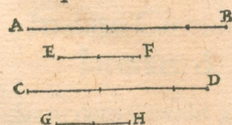




IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER QVINTVS.

DEFINITIONES.



Ars, est Magnitudo Magnitudinis minor maioris, quum minor maiorem metitur.

In explicandis huius Quinti Definitionibus, Numeros nobis accommodabimus. Id enim disciplinæ gratia in Principiorum ostensione licet: In demonstrationibus autem Propositionum, Geometrica dignitas seruanda est. Alia quippe ratio & natura Continuorum, atque alia Discretorum. In quibusdam tamen adeò religiosi non erimus: nempè dum Quantitatis vocabulum pro Magnitudine vsurpabimus. Quanuis enim hoc peculiarius, illud generalius sit: vtrunq; tamen Geometria paruo discrimine sibi vendicat. Partem itaq; hoc loco plerique esse putarunt, quæ totum æqualiter diuidit: scilicet quæ aliquoties sumpta, Totum integrè constituit. Ac sic binaria denominatio neque Ternarij, neq; Quinarij, neque vllius imparis integri pars erit: sed tantùm Quaternarij, Senarij, & parium. Sed meo iudicio, non rectè accipiunt. Neque enim Proportiones aliter quàm generatim considerandæ sunt. Atque vt in Discretis, omnis Numerus est pars aut partes maioris: sic & in Proportionum materia, omnis Magnitudo pars est aut partes maioris, quum Proportio rationalis est: hoc est, per numeros explicabilis. At dices, Euclides hoc loco Partem non sic definitam esse vult, vt ad Totum referatur, sed ad Multiplex. Verum id quidem est: alioqui nihil opus fuisset definitione Partis, quæ satis ex superioribus nota erat. Sed Multiplex aliter sumēdum quàm ipsi putent. Quinarius enim Binarij multiplex est, quum sit ipsius duplex sesquiplex, seu mauis, duplus sesquialter: Immò & Ternarius ipsius Binarij, sicut & Vnitas suijpsius, multiplex est. Sed quum difficile sit præsertim inter docendum, superpartientia & superparticularia in partes suas distinguere, ob inæqualitatem: in Demonstrationibus partes æquales assumuntur. In ijs verò quæ non de industria ponuntur Magnitudinibus, proportiones sunt fortuitæ. Quapropter si linea AB fuerit lineæ EF, verbi gratia, dupla sesquialtera: lineaq; CD fuerit lineæ GH itidem dupla sesquialtera: erit vtique AB ipsius EF, vt CD ipsius GH æquemultiplex. Pars igitur hoc loco accipienda, ac si dicas submultiplex: & eatenus considerandа, quatenus ad integrum habet rationem aliquam quæ per numeros exponi possit: Quod vox *metitur* satis indicat. Ex hoc consequitur Multiplicis Definitio.



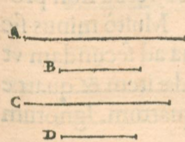
2 Multiplex, est Magnitudo maior minoris, quam metitur minor.

Hæc autem ex ſuperiori ſatis manifeſta eſt. Sunt enim hæ voces mutuæ, ſeu, vt vocant, ad aliquid. Senarius igitur, quem Binarius metitur: ſed & Quinarius, eiuſdem Binarij multiplex eſt.

3 Ratio eſt duarum Magnitudinum eiuſdem generis quædam habitudo inter ſe.

Ratio ſeu Proportio inter eas aduenit Magnitudines, quæ ſunt eiuſdem generis. Vt enim neque Numerum ad Sonum, neque Tempus ad Locum rectè quiſquam comparauerit: ſic neque Lineam ad Superficiem, neque Superficiem ad Solidum. Linearum verò ad Lineas, Superficierum ad Superficies, & Solidorum ad Solida conueniens fiet collatio. Quædam autem dicitur, non certa. Omnis enim Linea ad alteram habet rationem aliquam, non tamen certam. Atque eiuſmodi Quantitates dicuntur irrationales, incommenſurabiles, ſeu incommunicantes: qualis eſt lateris Quadrati ad Diametrum. Certæ verò rationes ſeu nominatæ, ſunt quæ per Numeros indicantur. Quarum denominationes ex Arithmeticis petuntur.

4 Proportionalitas, eſt Proportionum ſimilitudo.



Vt ſi dicatur ea eſſe proportio A ad B, quæ eſt C ad D: eiuſmodi ſimilitudo ſeu comparatio, Proportionalitas vocatur. Malè igitur verterunt quidam, Proportionem loco Proportionalitatis. Ἀναλογία enim aliâs Proportionem ſignificat Quintiliano: hîc verò Proportionum ſimilitudinem, quam Proportionalitatem diximus, vtcunque vox parum Latina ſit: quales & huc ſatis multæ incidunt.

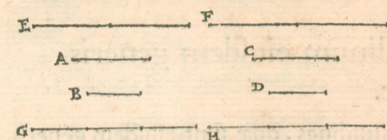
5 Rationem habere inter ſe Magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ, poſſunt altera alteram excedere.

Non poterat alio ingenio vim ſubſtantiamq; Rationis inter Magnitudines exponere, quàm Multiplicationis vocabulo: vt etiam incommenſurabiles includeret. Exceſſus enim index comparationis Quantitatum. Quum ergo latus Quadrati multiplicatum poſſit Diametrum excedere: Diameter item multiplicata, Peripheriam: habebit rationem latus ad Diametrum: atque inde Diameter ad Peripheriam, licet incognitam. Atque ex hoc loco ſatis colligitur, Angulum, quem contactus vocauit Euclides in XV Tertij, quantitatem non eſſe: quum multiplicatus nullam magnitudinem poſſit excedere: immò, quum multiplicari non poſſit: vt illîc demonſtrauimus. Multiplicationem autem hoc loco accipiemus, pro eo augmento quod fit in partes, quas vocant homogeneas. Linea enim multiplicata, id eſt, ducta partibus ſui ſimilibus, lineam excedet: ſed non ſuperficiem: ſicq; ad ſuperficiem non habebit rationem.

6 In eadem ratione Magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam vt tertia ad quartam: quum primę & tertiæ æquemultiplicia, ſecundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum ſecundo & tertium quarto ſecundùm quanuismultiplicationem, aut ſimul æqualia, aut ſimul maiora, aut ſimul minora.

Quia in Geometricis plerunque Rationes occurrunt incognitæ: ſeu innomina-

tæ : ad earum probationem, Æquemultiplicium officium nobis accersimus: quæ quidem variè comparamus, vt scopum attingamus. Hoc igitur innuit Definitio, Si fuerint quatuor Magnitudines, videlicet A prima, B secunda, C tertia, & D quarta : sumantur autem ipsarum A & C æquemultiplicia E & F, itemq; ipsarum B & D alia vtcunque æquemultiplicia G & H : itaque res cadat, si E & G sese inuicem æquent, aut sit alterum altero maius : etiam F & H sese inuicem æquare, aut esse alterum altero maius : Erit tum A ad B, sicut C ad D. Scilicet, si E & F per duplum auctis, sed G & H, verbi caussa, per triplum : sit E æquale G, & simul sit F æquale H : aut si E sit maius G, sit simul F maius H : aut si minus, minus : idq; semper fiat, seu per triplum, seu per quadruplum, seu per quancunque denominationem sumantur æquemultiplicia : erit omninò A ad B sicut C ad D. Erat igitur huius Definitionis sententia, Quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, aliaq; secundæ & quartæ vtcunq; æquemultiplicia sic fuerint, vt si multiplex primæ æquale fuerit multiplici secundæ, sit & multiplex tertiæ æquale multiplici ipsius quartæ : & si maius, maius : & si minus, minus : Erit prima ad secundam, vt tertia ad quartam. Sed in hæc verba non pronuntiauit Euclides, ne Theorematis speciem daret, non Principij. Multò minus sic pronuntiauit, In eadem ratione Magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam vt tertia ad quartam : quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, secundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum ad secundum, vt tertium ad quartum. Ignotum enim per æquè ignotum definisset.



At dices, Tam difficilis est, immò fortassè difficilior huiusmodi æqualitas aut excessus Æquemultiplicium, quàm simplicium inter se ratio. Non est sanè. Maiorum enim Quantitatum facilior est comparatio, ob partium numerum. Multiplicia enim pro arbitrio collocare & accommodare possumus, & ex ipsorum artificiosa cõstructione, simplicium rationem colligere. Præterea, quum duas Magnitudines duabus confero : vnum tamen vni confero, nempe rationem rationi ; sicq; intra binarium consisto. Quum verò multiplicia multiplicibus : quaternarium considerem oportet, nempè multiplex primæ, secundæ, tertiæ, & quartæ cum simplicibus ipsis. Atqui latiùs patet quaternarius binario. Quum igitur tractabiliora sint æquemultiplicia, iure obijci non poterit, quòd ignotum per æquè ignotum ostendatur. Huc accedit quòd quum mox egeremus Incontinua Proportionalitate, eius omninò fuit facienda mentio sub Definitionis titulo : ne in Demonstrationibus futuris ingenia auscultantium interciperentur, re inaudita. Nemo itaque offendatur quòd Principium difficile sit. Definitiones enim subtiles esse nihil vetat, præsertim quum res complicata definitur, qualis est ratio Magnitudinum. Nam & in traditionibus Dialecticis sæpe euenit, vt Definitum celeriùs promptiusq; capiamus, quàm Definitionem ipsam. Nemo enim est qui prius non capiat Hominem, quàm animal rationale. Quum verò substantiã Hominis cognoscere cupimus, tum nobis pleniùs satisfacit Definitio.

Possunt autem eiusdem esse generis Magnitudines : & possunt non esse. Dicemus enim, sicut Linea ad Lineam, ita Lineam ad alteram : sed & sicut Linea ad Lineam, ita Superficiem ad Superficiem.

Neque omittendum duxi, quòd hoc loco Euclides generatim locutus est, sicut prima ad secundam ita tertia ad quartam : vt vtranque intelligeremus & Continuam & Incontinuam Proportionalitatem. Vtrobique enim quatuor sunt Magnitudines: in hac expressæ, in illa tacitæ. Nam quum dicimus continuè, sicut A ad B ita B ad C quatuor sunt Magnitudines. Nam ipsa B magnitudo, duarum vicem supplet, dum consequitur & antecedit. Itaque non ex Euclidis sententia fecerunt, qui Continuam Proportionalitatem separatim definierunt : vt hîc Campanus quinta sua Definitione. Nam quæ vtriusque sunt propria, hoc loco Euclides dissimulauit, communiter

ambas

ambas vna hac ſexta Definitione complexus.

Quod verò dicitur, primum ſecundo & tertium quarto: hunc ſenſum habet, vt inæqualitatis & exceſſus ratione, conferatur multiplex primæ, multiplici ſecundæ: & multiplex tertiæ, multiplici quartæ: licet initio multiplex primæ cum multiplici tertiæ: & multiplex ſecundæ cum multiplici quartæ coniungendum fuerit.

Hanc Definitionem quàm potuimus clariſſimè explicauimus: vt controuerſiam abigeremus ex huius Quinti Definitionibus ortam. Nam qui in his Campanum reprehendunt, meo iudicio non rectè reprehendunt. Neque enim Euclidem non intellexit: Sed dum voces eaſdem identidem inculcat (quæ res ferè vna Proportionum materiam obſcuram facit): ipſe in orationis implicationem ſe conijcit: ob Dialecticæ, vt apparet, ignorantiam. Vnicuique tamen quod liberè ſentiat de Campano relinquimus, dummodò nos Proportiones Geometricè tractemus.

7 Magnitudines verò quæ in eadem ſunt ratione, Proportionales dicuntur.

Quantitates inter quas eſt rationum ſimilitudo, quæ anteà Proportionalitas vocata eſt, Proportionales dicuntur. Vt ſi fuerit A ad B ſicut B ad C: erunt A, B, & C proportionales. Atque hæc Proportionalitas Continua: nam inter ſingulas continuatur ratio, propterea quòd media conſequitur ad primam, & antecedit ad tertiam. Si verò fuerit A ad B ſicut C ad D: erunt & hæ quatuor proportionales, ſed incontinuè: quia binæ diſtinguuntur, ac velut interrumpuntur. Singulæ enim vnicam habent denominationem aut Antecedentis aut Conſequẽtis.

8 Quum multiplex primæ excesserit multiplex ſecundæ, multiplex verò tertiæ non excesserit multiplex quartæ: maiorem rationem habere dicetur prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam.

Hæc manifeſta eſt ex Sexta. Scilicet, Quatuor Magnitudinum nunquam maior eſt proportio primæ ad ſecundam quàm tertiæ ad quartam, quin contingat aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ collata ad aliqua ſecundæ & quartæ æquemultiplicia, ſic ſe habere, vt multiplex primæ excedat multiplex ſecundæ, neq; multiplex tertiæ excedat multiplex quartæ. Neque hoc contingit vnquam quin maior ſit proportio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam. Et hæc dicetur maior Improportionalitas. Quum verò multiplex primæ minus fuerit, quàm multiplex ſecundæ: neque multiplex tertiæ minus fuerit, quàm multiplex quartæ: erit minor ratio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam. Atq; hæc minor Improportionalitas dicetur.

9 Proportionalitas, minimùm, in tribus eſt terminis.

Quia duarum Magnitudinum collatio tantùm ratio eſt, non rationum ſimilitudo: fit vt duæ, Proportionalitatem non conſtituant. Tres itaque, minimùm, debent eſſe: Qui numerus Continuam ſemper Proportionalitatem conſtituit. Poſſunt autem & in Continua quatuor eſſe quantitates: hoc eſt, tam impari quàm pari numero. At in Incontinua, neque pauciores quàm quatuor, neque impari ſunt numero. Quod qui attentiùs conſiderauerit, comperiet Euclidem hac ratione inductum, Proportionalitatem Continuam & Incontinuam non ſeparaſſe.

Meminiſſe tamen oportet, Parem numerum præeſſe omni Proportionalitati. Nam quum dico vt A ad B ita B ad C: duarum rationum fit comparatio, vt anteà diximus.

mus. Itaque Binarij vim sic innuit Euclides.

10 Quum tres Magnitudines fuerint proportionales: dicetur proportio primæ ad tertiam sicut proportio primæ ad secundam duplicata.

Definit Proportionalitatem trium Quantitatum. Cuius Definitionis explicatio hęc est. In proportionalitate trium Quantitatum, latet Quadrati natura. Scilicet tantum producunt duo extremi termini inter se, quantum medius in se. Ob id, proportio extremorum inter se, est duplum proportionis primi ad secundum. Quod nisi per Numeros satis definitè exponi nequit. Sint 2 ad 4, vt 4 ad 8. Hæc est proportionalitas Continua in dupla ratione. Duco 2 in 8, fiunt 16: & tantundem producunt 4 in se. Itaque, ex definitione, erit proportio 2 ad 8, denominata à Quadrato Binarij, proportionem primi ad secundum denominantis: nempè quadrupla. In tripla ratione, sint 2 ad 6 vt 6 ad 18. Denominationem proportionis primi ad secundum, nempè 3, duco in se: fiunt nouem, denominator proportionis 2 ad 18. Atq; hæc est Definitionis sententia: ex qua binarij, ternarij, & quaternarij elicitur mira colligatio. Nam in tribus Quantitatibus quatuor insunt: atque huius affinitatis, binarius est index. Huius enim numeri singularis proprietas est, quòd tantum efficiat duplicatus, quantum in se ductus. Ea re Euclides duplicatam proportionem dixit, quasi quadratam: propterea quòd binarius Quadrati est index: vt cæteræ denominationes naturam primæ sequerentur: scilicet tripla proportio duplicata, eadem esset quæ in se ducta. Quadratum itaque per Binarium significatur, sicut Cubus per Ternarium, Quadratumquadrati, seu, vt vulgò dicunt, Censuscensus, per Quaternarium: & Supersolidum, Relatum primum dicunt, per Quinarium: sicq; infinitè: Quod nos satis luculenter exposuimus in priore libro nostræ Algebræ. Quum igitur Quantitatem quantitati comparamus, vnitas repræsentatur in Numeris: in Continuis, linea. Trium verò Quantitatum collatio in Numeris, Quadratum: in Continuis, Superficiem: quatuor deniq; proportio in Numeris, Cubum: in Continuis, Solidum. Hæc autem speculatio in immensum patet. Hinc pendet Definitio sequens.

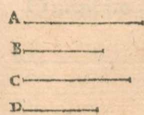
11 Quum quatuor Magnitudines continuè proportionales fuerint: dicetur proportio primæ ad quartam sicut primæ ad secundam triplicata: ac semper ordine vna plus, donec sit absoluta proportionalitas.

Quatuor Quantitatum continua proportionalitas, Cubi includit naturam: sicut trium, Quadrati, vt modò diximus. Cubi autem index est Ternarius. Proportio itaq; primæ ad quartam, est proportio primæ ad secundam triplicata: nempè Denominatore in se cubicè ducto. Vt in Numeris, sint 2 ad 4 vt 4 ad 8 & 8 ad 16: Denominator Proportionis, est Binarius. Duco itaque Binarium in se cubicè, fiunt 8: & tanta est proportio primi ad quartum: scilicet, 2 ad 16, octupla. In quinque autem Positis, erit proportio Primi ad quintum quadrupla quàm Primi ad secundum: In sex, quintupla: sicq; continenter, donec ad vltimum par Magnitudinum perueniamus. Atque hæc est Definitionis sententia. Sed quia natura supra Corpus nihil habet quod sensui exponat, in Geometria non considerantur proportionalia vltra quatuor Posita. In Numeris autem, qui sunt velut interpretes quidam rerum continuarum, vt omnia quæ formam habent, infinita esse ostenderentur, apertè in immensum exurgunt progressiones Proportionalitatum, omniumq; specierum quæ normam recipiunt: Quasi sensus finitus, Intellectus verò interminatus esse comprobetur. Huc autem Numeros afferre fuit necessarium. Dupla enim & tripla ratio, Numerationem præ se fert: neque aliter quàm per Numeros expediri potest.

12 Similis rationis Magnitudines dicuntur, Antecedentia antecedentibus & Consequentia consequentibus.

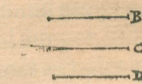
Similitudinem Rationum anteà proposuit: hoc est, Proportionalitatem: hîc similis rationis Magnitudines suis appellationibus nuncupat. ac si diceret, Magnitudines Proportionales significantur, quatenus antecedunt & consequuntur. Scilicet, sumuntur æquemultiplicia Antecedentium, & æquemultiplicia Consequentium: vt ex ijs proportionalitatem Magnitudinum colligamus. Hanc itaque apposuit Euclides, vt vocabula, quæ dicunt, artis exprimeret. Antecedentium autem & Consequentium variæ sunt comparationes: quæ Definitionibus sequentibus explicantur.

13 Permutata Ratio, est acceptio Antecedentis ad antecedens, vt Consequentis ad consequens.



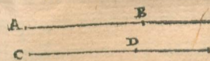
Prima comparatio Magnitudinum, quæ, pronuntiatione naturali, est vnius Antecedentis ad suum Consequẽs, sicut alterius Antecedentis ad suum Consequens, dux est atque origo cæterarum comparationum: ac primùm Permutatæ: in qua mutatur secundum Antecedens in prius Consequens, & prius Consequẽs in secundum Antecedens. Vt si fuerit A ad B sicut C ad D: & concludatur, A ad C sicut B ad D: hæc Permutata dicetur Ratio.

14 Conuersa Ratio, est acceptio Consequentis tanquam antecedentis, ad Antecedẽs tanquã consequẽs.



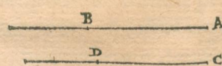
In hac conuertuntur duo Consequentia in duo Antecedentia, & contrà. Vt si fuerit A ad B sicut C ad D: & concludatur conuerso modo, B ad A sicut D ad C.

15 Coniuncta seu Composita Ratio, est acceptio Antecedentis cum consequente instar vnius, ad ipsum Consequens.



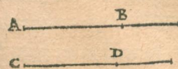
Vt si fuerit A ad B sicut C ad D: & concludatur, totum AB ad B sicut totum CD ad D: dicetur Coniuncta seu Composita Ratio.

16 Disiuncta seu Diuisa Ratio, est quum augmenta Antecedentium supra Consequentia, ad ipsa Consequentia comparantur.



Vt si fuerit totum AB ad B sicut totum CD ad D: & concludatur, A ad B sicut C ad D. Et est conuersus modus Coniunctæ.

17 Euersa Ratio, est quum Antecedentia comparantur ad excessus quos habent supra Consequentia.



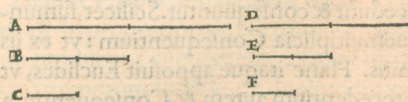
Euersio Rationum, fit quum Antecedens comparatur cum ea quam habet ad Consequens differentia. Vt si fuerit AB ad B sicut CD ad D: & concludatur, sicut AB ad A, ita CD ad C.

18 Aequa Ratio dicitur, quum plures Magnitudines hinc inde æquali numero sumptæ, & binæ compa-

ratæ

ratæ fuerint: tum æquali mediorum numero ſublato, fit extremorum vtrinque comparatio.

Vt ſi ſumantur Magnitudines A, B, & C: aliæq́; totidem D, E, & F: ſiue ſint eiuſdem generis cum primis, ſiue diuerſi: fuerintq́; ſecundæ inter ſe in eadem ratione



qua primæ: ſiue eodem ordine, vt ſi dicatur A ad B ſicut D ad E, & B ad C ſicut E ad F: ſiue ordine conuerſo, vt ſi dicatur A ad B ſicut E ad F, & B ad C ſicut D ad E: atque omiſſis medijs vtriſq; B & E, concludatur A ad C ſicut D ad F: Hæc argumentandi ratio dicetur, ab Æqua Proportionalitate.

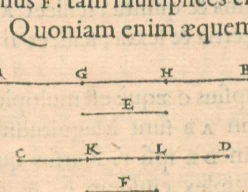
THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.





SI quælibet Magnitudines totidem Magnitudinum ſingillatim ęquemultiplices fuerint: quàm multiplices ſunt ſingulæ ſingularum, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint Magnitudines A B & C D, totidem Magnitudinum E & F æquemultiplices: ſcilicet A B ipſius E, & C D ipſius F. Dico, quammultiplex eſt A B ipſius E, & C D ipſius F: tam multiplices eſſe ambas A B, C D, ambarum E, F.



Quoniam enim æquemultiplex eſt A B ipſius E, vt C B ipſius F: quot in A B ſunt Magnitudines æquales ipſi E, totidem erunt & in C D ipſi F æquales. In A B igitur ſint Magnitudines A G, G H, & H B, æquales ipſi E: & in C D ſint totidem numero Magnitudines, C K, C L, & L D, æquales ipſi F. Quum itaque multitudo Magnitudinum in A B & in C D ſit eadem: ſitq; A G ipſi E æqualis, & C K ipſi F: erunt, per communem Notionem, duæ A G & C K ſimul ſumptæ, duabus E & F ſimul ſumptis æquales. Quumq; G H ſit eidem E æqualis: & K L eidem F: erunt quoque G H & K L ſimul ſumptæ, ipſis E & F ſimul ſumptis æquales. Atque eadem ratione H B & L D ſimul ſumptæ, ijſdem E & F ſimul ſumptis æquales. Quot igitur in A B ſunt Magnitudines æquales ipſi E, quotq; in C D ipſi F: tot ſunt in A B & C D ſimul ſumptis, ipſis E & F ſimul ſumptis æquales. Quammultiplex igitur eſt A B ipſius E, & C D ipſius F: tam multiplices ſunt A B, C D, ipſarum E, F, Quod erat oſtendendum.

QVVM autem huius primæ Propoſitionis vim rationemq; perpenderimus, totam in communi iudicio ſitam eſſe intelligemus. Nam quum dicitur, Si æqualibus æqualia addantur, coniuncta æqualia fieri: nihil aliud quàm æqualitas proportionum ſignificatur. Scilicet, ſi fuerit M æqualis N: & O æqualis P: quatuor habeo Quantitates proportionales. Eſt enim ſicut M ad N, ita O ad P. Si igitur addamus O ipſi M, & P ipſi N: fiet totum M O, æquale toti N P. Ita, quum dico A B triplum eſſe ipſius E, & C D ipſius F: hoc tacitè dico, ſi A B addatur ad C D, & E addatur ad F: totum A B, C D, eſſe triplum totius E, F.

M O
N P

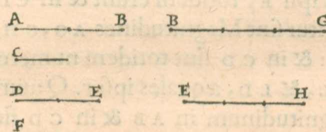
Sic æqualitas omnes Proportionũ ſpecies dirigit & gubernat. Ac quemadmodum æqualitas æqualitati addita, æqualitatem conſeruat: ita multiplicitas, vt ſic dicam, multiplicitati addita, proportionalitatem retinet ſimilem. Sed in quatuor Magnitudinibus aut pluribus æqualibus, nihil refert quæ cui præponatur: Mutato enim ordine, non mutatur denominatio. Quum verò occurrit inæqualitas, diſtinctiùs animaduertendum eſt. Maiori enim arte opus eſt, in ijs, quæ non ordine collocata, confuſionem parere ſolent. Tota igitur Proportionum materia ferè in communi intelligentia conſiſtit. Nam quòd tam difficilis habita ſit, ex præſumpta quadam opinione factũ eſt. Proportionũ enim tractatio obſcura non eſt: ſed eam ad vſum traducere, id demùm operoſum eſt. Aliud enim eſt artem tenere, & aliud ad rem ſuam cõuertere. Sicut in rebus gerendis, quid optimum ſit multi in otio ſcienter diſputant. At quum in rem præſentem ventum eſt: quod ex vſu eſt, vix vnus aut alter exequi meminit. Multas itaque Propoſitiones in hunc Quintum Librum Euclides contulit, quæ pro Principijs habendæ fuerant. Sed id exquiſitè fecit, vt ſignificaret, Propoſitionum quidem cognitionem in medio eſſe poſitam, ſed earum vſum difficilem. Hunc igitur Librum

brum diligenter amplectantur qui Geometriam seriò facere volent. Geometria enim quantacunque est, tota in Proportionibus est: neque aliud quicquam spectat, quàm vt Lineas Lineis, Superficies Superficiebus, & Corpora Corporibus componat & comparet. Atque hæc in hac prima Propositione præfari, non abs re nobis visum est.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex vt tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æquemultiplex vt sexta quartæ: prima quoq; & quinta, secundæ æquemultiplex erit vt tertia & sexta quartæ.

In hac de sex Magnitudinibus agitur. Sit itaque A B prima, C secunda, D E tertia, F quarta: B G quinta, & E H sexta: sitq; prima A B, secundæ C, vt tertia D E, quartæ F æquemultiplex: Et quinta rursus B G, eiusdem C secundæ: vt sexta E H, eiusdem F quartæ æquemultiplex. Dico compositam ex prima & quinta, scilicet A G, ipsius secundæ C æquemultiplicem, vt compositam ex tertia & sexta, scilicet D H, ipsius quartæ F.

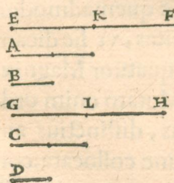


Quoniam enim A B ipsius C æquè est multiplex, vt D E ipsius F: quot in A B sunt Magnitudines ipsi C æquales, tot & in D E ipsi F. Rursus quoniam B G æquè est multiplex eiusdem C, & E H eiusdem F: quot in B G sunt Magnitudines ipsi C æquales, tot & in E H eidem F. Quot igitur sunt Magnitudines in tota A G ipsi C æquales, tot sunt & in tota D H ipsi F æquales. Quammultiplex igitur est composita A G, ipsius C secundæ, tam multiplex est, per antecedentem, composita D H, ipsius F quartæ, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si primum secundi æquè fuerit multiplex vt tertiũ quarti, sumantur autem æquemultiplicia primi & tertii: erunt quoque multiplex primi, ad secundum, & multiplex tertii, ad quartum æquemultiplicia.

Huc etiam sex interueniunt posita. Sit enim primum A, secundi B, vt tertium C, quarti D æquemultiplex: sumanturq; ipsorum A & C, æquemultiplicia E F & G H. Dico E F ipsius B, vt G H ipsius D æquemultiplex.



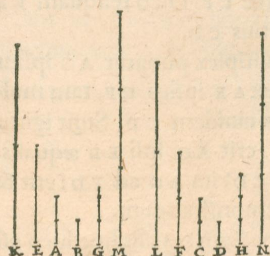
Quoniam enim æquemultiplex est E F ipsius A, vt G H ipsius C: quot in E F sunt Magnitudines æquales ipsi A, tot in G H erũt Magnitudines æquales ipsi C. Ponantur itaque in E F Magnitudines E K & K F, æquales ipsi A: & in G H totidem Magnitudines G L & L H, æquales ipsi C. Et quoniam æquemultiplex est A ipsius B, vt C ipsius D: erit quoque E K ipsius B æquemultiplex, vt G L ipsius D. Ac per hoc, æquemultiplex est K L eiusdem B, & L H eiusdem D. Quoniam igitur, vt ponit secunda huius, primum E K, secundi B æquè est multiplex vt tertium G L, ipsius D quarti: est autem & quintum K F, ipsius B secundi æquemultiplex, vt sextum L H ipsius D quarti: Et compositum igitur primum & quartum E F, ipsius B secundi æquè erit multiplex, per eandem, vt tertium & sextum G H, ipsius D quarti, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Si primum ad secundũ eandem habuerit rationem quam

tertium ad quartum, primi autem & tertii Aequemultiplicia ſumantur, itemq́; ſecundi & quarti: ipſa quoque Aequemultiplicia iuxta quāuis multiplicationem, eandem inter ſe rationem habebunt.

Sit eadem ratio A primi ad B ſecundum & C tertij ad D quartum: ſintq́; E ad A & F ad C: itemq́; G ad B & H ad D æquemultiplicia. Dico eſſe E ad G ſicut F ad H.



Sumantur K ad E & L ad F: itemq́; M ad G & M ad H, æquemultiplicia. Et quia E & F ſunt ipſorum A & C æquemultiplicia: itemq́; K & L ipſorum E & F æquemultiplicia: erunt, per antecedentem, K & L ipſorum A & C æquemultiplicia: ac per eandem, M & N ipſorum B & D æquemultiplicia. Quare, per cōuerſionem ſextæ Definitionis, K ad M & L ad N ſimiliter ſe habebunt in addendo, minuendo, & æquando. Quia ergo K & L, ipſorum E & F ſunt æquemultiplicia: itemq́; M & N ipſorum G & H: erit, per eandem directam, E ad G ſicut F ad H, Quod erat demonſtrandum.

LEMMA, ſeu ſumptio. Quoniam igitur conſtitit ſi K excedit M, etiam L excedere N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus: atque ob id, ſi M excedit K, etiam N excedere L: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus: Erit ex hoc, G ad E & H ad F eadem ratio. Hinc conſequitur,

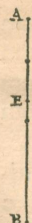
Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, conuerſo quoque modo proportionales erunt.

Hoc eſt, ſi fuerit ſicut A ad B, ita C ad D: erit & ſicut B ad A, ita D ad C. Hæc igitur Conuerſam rationem probat, quam in decimaquarta Definitione poſuerat Euclides.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Si Magnitudo Magnitudinis æquè fuerit multiplex vt ablata ablatæ: erit & reliqua reliquæ tam multiplex, quàm tota totius.

Sit tota AB totius CD æquemultiplex, vt ablata AE ablatæ CF. Dico reliquam EB reliquæ DF tam multiplicem, quàm eſt tota AB totius CD.



Quàm multiplex eſt AE ipſius CF, tam multiplex fiat EB ipſius CG. Eritq́;, per primam huius, quàm multiplex AE ipſius CF, tam multiplex AB ipſius GF. At quàm multiplex eſt AE ipſius CF, tam multiplex eſt AB ipſius CD, per hypotheſin. Et AB igitur vtriuſque GF & CD eſt æquemultiplex. Æqualis eſt itaq;, per communem Notionem, GF ipſi CD: quapropter ablata communi CF: erit reliqua GC, reliquæ FD æqualis. Sed EB æquemultiplex poſita eſt ipſius GC vt AE ipſius CF. Igitur tam multiplex eſt EB ipſius FD, quàm multiplex eſt AE ipſius CF. Atqui per hypotheſin, AE tam multiplex eſt ipſius CF, quàm tota AB totius CD. Et EB igitur ipſius FD tam multiplex, quàm tota AB totius CD, Quod erat demonſtrandum.

HÆC Demonſtratio, vt vulgata, ita certa eſt. Sed tamen quia id exigit quod nondum docuit Euclides: ſcilicet vt tam multiplex fiat EB ipſius CG, quàm multiplex eſt AE ipſius CF: ſcrupulo non vacat, apud eos præſertim qui res perſpicaciùs examinant. Nam ſi linea AE eſſet, verbi gratia, triplex ipſius CF: qua ratione fiet EB

triplex ipſius C G, quum id non antè doceat Euclides quàm in duodecima Sexti? Duriuſculũ enim eſt vt id cogamur facere aut concedere, quod poſterius erit ediſcendũ.

Huic igitur obiectationi ſic occurremus, vt dicamus hanc diuiſionem in hunc locum tantùm recipi doctrinæ gratia: ſcilicet vt procedat Demonſtratio, non quò ſit ad vſum præſentem exquiſitè neceſſaria. Ponimus enim Lineam Lineæ æqualem: licet huiuſmodi æquationem nondum didicerimus. Sunt enim hypotheſes liberæ: vt diſciplinarum fundamenta iaciantur.

Sed tamen hunc ſcrupulum vitabimus hac ratione. Sit Magnitudo A B Magnitudinis C D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F æquemultiplicem, vt totam A B totius C D.

Quàm multiplex eſt A E ipſius C F, tam multiplex ponatur A G ipſius F D. Eritq;, per primam huius, quàm multiplex A E ipſius C F, tam multiplex E G ipſius C D. Sed ſic fuit multiplex A B eiuſdem C D. Sunt igitur E G & A B æquales. Communis auferatur A E: erit A G ipſi E B æqualis. Et quia ſicut A E ad C F (ob idq;, ſicut A B ad C D) ita A G ad F D: erit & ſicut A B ad C D, ita E B ad C F, Quod erat demonſtrandum.

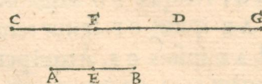
ALIVD igitur eſt, lineam terminatam & coactam (qualis hoc loco eſt E B) in partes neceſſarias ſecare: & aliud, lineæ terminatæ, qualis eſt F D, partes æquales creare, vt in A G. Demonſtrationem tamen aliorum nolui omittere: quòd ſubtilis ſit, & ad ſimiles reperiendas ingenium acuat.

Probabimus & ab impoſſibili. Sit tota A B totius C D tam multiplex, quàm ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F tam multiplicem, quàm tota eſt A B totius C D.

Si enim non tam ſit multiplex, erunt in E B aut plures aut pauciores Magnitudines ipſi F D æquales, quàm in A E ipſi C F. Sint ergo, ſi poſſint, plures: Et ponatur E G tam multiplex ipſius F D, quàm A E ipſius C F. Eritq;, per primam huius, tam multiplex A G ipſius C D, quàm A E ipſius C F. Sed A B poſita eſt tam multiplex ipſius C D, quàm eadem A E eiuſdem C F. Erit igitur, per communem Notionem, A G ipſi A B æqualis, pars toti, Quod eſt abſurdum. Simili argumentatione probabimus pauciores non eſſe Magnitudines in E B æquales ipſi F D, quàm in A E, ipſi C F. Sunt igitur totidem multitudine. Quare & totidem quot in tota A B toti C D, Quod fuit demonſtrandum. Hoc Theorema Campanus ſic proponit,

Si fuerint duæ Quantitates, quarum vna ſit pars alterius, minuaturq; ab vtraque ipſarum ipſa pars: erit reliquum reliqui vt totum totius æquemultiplex.

Partem hoc loco pro Submultiplici ſumit. Sit itaq; Quãtitas A B tanta pars Quantitatis C D, quanta E B ipſius A B: minuaturq; A B ex Quantitate C D, & reliquum ſit F C: vt F D ſit æqualis A B. minuatur etiam E B ex Quãtitate A B, & ſit reliquum E A. Dico reliquum F C tam multiplex eſſe reliqui A E, quàm multiplex eſt totum C D totius A B.



Quum enim F D ſit æqualis A B, erit F D ita multiplex E B vt C D eſt multiplex A B. Ponam itaque D G tam multiplicem A E, quàm F D eſt multiplex E B. Eritq;, per primam huius, F G tam multiplex A B, quàm F D eſt multiplex E B. Et quia ſic fuit C D multiplex A B, vt F D multiplex E B: erit vtraque duarum Quantitatum C D & F G æqualiter multiplex Quantitatis A B. Quapropter, ex communi Notione, C D & F G ſunt æquales. Dempta igitur F D ab vtraque ipſarum: erit C F æqualis D G. Et quia D G ſic fuit multiplex A E ſicut F D multiplex E B: ob id, ſicut A B multiplex E B: ob idq;, ſicut C D multiplex A B: erit

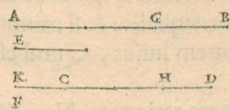
C F

CF ita multiplex AE vt tota CD totius AB, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

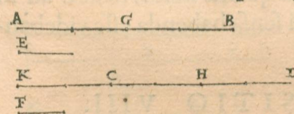
Si duæ Magnitudines duarum Magnitudinum æquemultiplices fuerint, auferanturq́; aliquæ earundem æquemultiplices: erunt & reliquæ vel eiſdem æquales, vel ipſarum æquemultiplices.

Sint duæ Magnitudines, AB quidem, Magnitudinis E: & CD, Magnitudinis F æquemultiplices: & ablatæ ex his AG & CH, earundem E & F æquè ſint multiplices. Dico reliquas GB & HD eiſdem E & F aut æquales, aut ipſarum æquemultiplices.



Sit enim primùm GB æqualis ipſi E. Dico & HD ipſi E eſſe æqualem. Ponatur ipſi F æqualis CK. Et quoniam æquemultiplex eſt AG ipſius E vt CH ipſius F: æqualis autem GB ipſi E, & CK ipſi F: æquè igitur, per primam huius, eſt multiplex AB ipſius E, vt HK ipſius F. Æquè autem ponitur multiplex AB ipſius E, vt CD ipſius F. Æqualis igitur eſt HK ipſi CD. Communis auferatur CH. Reliqua igitur CK, reliquæ HD eſt æqualis. Sed F ipſi CK eſt æqualis. Quare & F ipſi HD eſt æqualis, Quod erat oſtendendum.

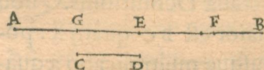
Si verò GB ſit multiplex ipſius E: ponam CK ipſius F æquemultiplicem. Eritq́; vt priùs, AB ipſius E æquemultiplex, per primam huius, vt HK ipſius F. Sed & ſic poſita fuit æquemultiplex AB ipſius E vt CD ipſius F. Erit igitur HK ipſi CD æqualis: Et ablata communi CH, reliqua CK, reliquæ HD æqualis. Quare quum GK ſit ipſius F æquemultiplex vt GB ipſius E: erit & HD ipſius F æquemultiplex vt GB ipſius E, Quod fuit demonſtrandum.



Hæc Demonſtratio prima ſpecie videbitur non planè ſatisfacere menti Euclidis. Nego enim, inquiet aduerſarius, ablatam GB poſſe eſſe æqualem ipſi E: nego id quoque, poſſe eſſe multiplicem eiuſdem. quin tu hoc proba.

Sed id propiùs intuenti probatione non indigebit. Nam quum AB ſit multiplex ipſius E: erunt aliquot Magnitudines in AB æquales ipſi E. Quumq́; AG itidem ſit multiplex ipſius E: erunt & aliquot Magnitudines in AG æquales ipſi E, ſed pauciores quàm in AB. Supererit ergò, vt reliqua GB ſit aut æqualis ipſi E, aut eiuſdem multiplex.

Vt tamen omni ex parte integram demus Demonſtrationem, Sit Magnitudo AB, Madnitudinis CD multiplex æqualium partium (ſcilicet CD cõtineatur aliquoties in AB, vt nihil ſuperſit): Et ex AB auferatur AE, quæ ſit multiplex & æqualium partium eiuſdem CD. Dico reliquam EB, eidem CD aut eſſe æqualem, aut ipſius multiplicem æqualium partium.



Si enim neque ſit æqualis, neque multiplex: ponatur EF ipſi CD æqualis: vt reliqua FB ſit minor CD, ſi fieri poſſit. Et diuidatur AE in Magnitudines ipſi CD æquales: ſcilicet in AG, & GE. Quoniam igitur AG, GE, & EF ſunt ipſi CD æquales, ſed FB minor ipſa CD: non diuiditur ergò tota AB in partes ipſi CD æquales. Non eſt igitur ipſius multiplex æqualium partium, quod eſt contra hypotheſin. Addidi æqualium partium, propter id quod diximus initio Definitionum, verbum Multiplicis etiam ad inæqualitatem extendi. Sed inter docendum, ob facilitatem aſſumuntur ęqualia Multiplicia. Inæqualium enim, nempè Superpartientium & Superparticularium, tædioſa & obſcura eſt diuiſio. Sed tamen vtrobiq; ratio eadem.

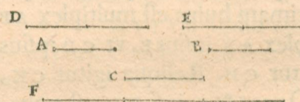
THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Aequales,ad eandem habent eandem rationem: & eadem ad æquales.

Sint æquales Magnitudines A & B : alia autem quæuis Magnitudo C. Dico vtranque A & B, ad ipsam C eandem habere rationem : Et C, eandem rationem habere ad vtranque.

Sumantur ipsarum A & B æquemultiplices D & E : ipsius verò C, alia vtcunque multiplex F. Quoniam igitur æquemultiplex est D ipsius A vt E ipsius B : æqualis autem est A ipsi B : æqualis igitur,per communem Notionem, erit D ipsi E. Si ergo excedit D ipsam F, excedit & E eandem F : & si æqualis, æqualis : & si minor, minor. Est igitur vt A ad C, sic B ad C, per sextam Definitionem huius, Quod est prius.

Dico etiam C ad vtranque ipsarum A & B, eandem habere rationem. Nam iisdem positis, erit, ex communi sententia, æqualis D ipsi E. Si igitur excedit F ipsam D, excedit & ipsam E : & si æqualis, æqualis : & si minor, minor. Quare, per eandem sextam Definitionem, erit sicut C ad A, ita C ad B, Quod erat demonstrandum.



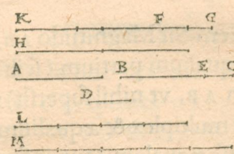
Hoc posterius poterit expeditiùs demonstrari. Nam quum constiterit sicut D ad C, ita E ad C : erit conuerso modo, per Consectarium quartæ huius, sicut C ad A, ita C ad B. Et hoc Theorema ex iis est,quæ inter animi sensa habenda esse videbantur.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Inęqualium Magnitudinum maior ad eandem, maiorem habet rationem,quàm minor:Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem,quàm ad maiorem.

Sint duæ Magnitudines inæquales, A & B C, quarum maior B C : sit autem tertia Magnitudo D. Dico, maiorem esse rationem B C ad D, quàm A ad eandem D : Contrà, maiorem esse rationem D ad A, quàm D ad B C.

Ad prioris partis demonstrationem, intelligendæ sunt B C prima, D secunda : A tertia,& rursus D quarta.Deinde primæ & tertiæ æquemultiplicia, itemq; secundæ & quartæ,sic constituenda:vt multiplex primæ excedat multiplex secundæ , multiplex verò tertiæ non excedat multiplex quartæ : iuxta sententiam octauæ Definitionis.Quod hac ratione fiet. Quoniam maior est B C quàm A : ponam B E ipsi A æqualem : ac eousque multiplicabo æqualiter vtranque partem E C & E B, vt ex E C proueniat quantitas maior quàm D : quæ sit F G : & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D : quæ sit F K. Eritq;, propter æqualem multiplicationem , F K tam multiplex E B, quàm F G multiplex E C : ob idq; , per primam huius,erit tota G K totius B C æquemultiplex vt FK ipsius E C. Ponam insuper H tam multiplicē ipsius A, quàm G K ipsius B C, ac per hoc,quàm F K ipsius E B. Erūtq; vt F K & H æquales:quū vtriusq; submultiplices positæ sint æquales. Quia igitur F K non est ipsa D minor : neq; H eadem D minor erit.Nunc autē muliplico D, donec proueniat quātitas proximè maior quàm H. Scilicet sumo duplum ipsius D : inde triplum : ac deinceps vno plus, quoad proueniat quātitas M,proximè maior quàm H. Sumo postmodū ipsius D multiplicem quantitatē proximè minorē multiplici M : quæ sit L : vt ipsa M cōstet ex L & D.Eritq;

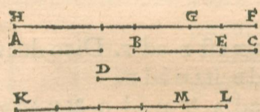


L non minor quàm H: quum M sit proximè maior ipsa H. Quumq; H sit æqualis F K: non erit F K minor L: Neque item F K & D, minores erunt quàm L & D: ac propterea non minores quàm M. Et quia F G est maior D: erit tota G K maior M. Quumq; ad primam B C & tertiam A, sumptæ sint æquemultiplices G K & H: ad secundam verò & quartam (quæ est eadem D) æquemultiplex M sumpta sit, instar duarum: & G K multiplex primæ excedat M multiplex secundæ, neque H multiplex tertiæ excedat eandem M multiplicem quartæ: Erit, per octauam Definitionem huius, maior proportio B C ad D, quàm A ad eandem D, Quod est prius.

Secundum autem demonstratur ex eadem Definitione, conuerso ordine Magnitudinum: vt D sit prima, A secũda: D rursus tertia, & B C quarta. Excedit enim M multiplex primæ, H multiplicem secundæ: neque eadem M multiplex tertiæ, excedit G K multiplicem quartæ. Quare maior est proportio D ad A, quàm D ad B. Sicq; patet tota Propositio.

HANC Campani Demonstrationem, quum paulò esset clarior Demonstratione Theonis, aliquanto etiam clariorem fecimus. Quæ sic tamen obscura est. In quo mirari subit, quum huius Quinti Libri Propositiones in communi intelligentia positæ sint, sicut anteà monuimus, ac prima specie quendam veluti consensum in animis pariant: quòd tam implicatè demonstrentur. Huic igitur loco rursus compendium simul & lucem attulimus.

Sint duæ Magnitudines A & B C, quarum maior B C: sitq; tertia quantacunque Magnitudo D. Dico maiorem esse rationem B C ad D, quàm A ad D.



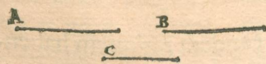
Intelligantur vt priùs, B C prima, D secunda, A tertia, & rursus D quarta. Earumq; parentur æquemultiplicia ad hunc modum. Quoniam maior est B C, quàm A: pono E B ipsi A æqualem: Et vtranque E C & E B æqualiter sic multiplico, vt ex E C proueniat quantitas maior quàm D: quæ sit F G: & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D: quæ sit G H. Eritq;, propter æqualem multiplicationem, G F æquemultiplex ipsius E C vt G H ipsius E B: ob idq;, per primam huius, tam multiplex est G H ipsius E B, sicq; ipsius A, quàm tota F H totius B C. Habeo itaque F H æquemultiplicem ipsius B C primæ, & G H ipsius A tertiæ. Nunc autem multiplico D donec exurgat quantitas proximè maior quàm G H: scilicet sumo ipsius D duplum, indè triplum: ac continenter vno plus. Et produco K L, quæ sit prima multiplex, maior ipsa G H. Et ex K L, reseco L M simplum & æquale ipsi D. Est igitur K L ipsius D vtcunque multiplex, instar duarum, quatenus est D secunda & quarta. Et quoniam K L est proximè maior ipsa G H: non erit eadem G H minor K M. Et quia F G est maior D, & L M eidem D æqualis: excedet F H multiplex primæ, ipsam K L multiplicem secundæ. Sed quum K L posita sit maior quàm G H: non excedet ipsa G H multiplex tertiæ, K L multiplicem quartæ. Quare, per octauam Definitionem huius, maior est ratio B C ad D, quàm A ad D, Quæ est prior pars Theorematis.

Altera autem modò probata est: scilicet ex eadem Definitione, conuerso ordine Magnitudinum & Multiplicium.

THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem habent eandem rationem, Magnitudines, inter se sunt æquales: Et ad quas eadem habet eandem rationem, eæ quoque sunt æquales.

Sit duarum Magnitudinum A & B eadem ratio ad C Magnitudinẽ. Dico A & B esse æquales. E conuerso, si eadem sit ratio C ad vtranque earum: dico & sic ipsas esse æquales. Conuersa septimæ huius.



Prior pars ſic probatur. Si enim non ſunt æquales: erit altera ipſarum, vt A, maior. Et erit, per priorem partem antecedentis, maior ratio A ad C, quàm B ad C, cõtra hypotheſin. Secunda verò ſic. Si A eſt maior B: erit, per ſecundam partem antecedentis, maior ratio C ad B, quàm C ad A, contra hypotheſin.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Quæ duarum Magnitudinum ad eandem maiorem rationem habet, hæc maior eſt. Ad quam autem duarũ, eadem maiorem rationem habet, hæc minor eſt.

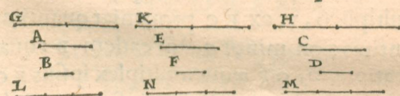
Si fuerit ratio maior A ad C, quàm B ad D: dico A eſſe maiorem B. Si verò fuerit ratio maior C ad B, quàm C ad A: dico econtrariò B maiorem eſſe quàm A. Conuerſa octauæ.

Prior pars cõſtat ex priori parte ſeptimæ & priori octauæ. Nam per priorem ſeptimæ, non erit A æqualis B: Et per priorem octauæ, non erit minor. Secũda verò patet ex ſecundis partibus earundem.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XI.

Quæ eidem ſunt æquales rationes, & inter ſe ſunt æquales.

Sit ratio A ad B & ratio C ad D, vtraque æqualis rationi quæ eſt E ad F. Dico duas rationes A ad B & C ad D eſſe æquales: eſſe ſcilicet ſicut A ad B, ita C ad D.



Sumantur G ad A, & H ad C, & K ad E æquemultiplices: itemq; L ad B, & M ad D, & N ad F, aliæ vtcunque æquemultiplices. Et quia ponitur E ad F ſicut A ad, B & ſicut C ad D: erit, per conuerſam ſextæ Definitionis bis ſumptam, ſi K excedat N, vt G excedat L, & H excedat M: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Si igitur G excedat N, excedet H ipſum M: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Quare per ſextam Definitionem, erit vt A ad B, ita C ad D, Quod erat probandum.

In hac demonſtratur idem, vt dicitur, per idem. Tam enim confeſſa eſt ſimplicium comparatio, quàm exceſſus & æqualitas Æquemultiplicium: quanuis aliter probari poſſe non negem. Sed quorsùm? quum ſit animi ſenſum, ac ſub eo Principio audiatur, Quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia? Quod certè ita generale eſt & vniuerſum: vt in omni arte, in omni ſpecie, in omni denique ingenij exercitatione, aſſenſionem & probationem præ ſe ferat. Sed tamen huiuſce rei defenſionem iam antè occupauimus in prima huius.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XII.

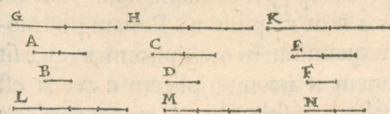
Campano 13.

Si ſingulæ Magnitudines ad ſingulas eandem habeant rationem: erunt, ſicut vna antecedentium ad vnam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Quod prima propoſuit de Multiplicibus, hæc in vniuerſum de quibuſcunq; Magnitudinibus.

Sint Magnitudines ſingulæ A, C, E, ad ſingulas B, D, F, eandem rationem habentes:

tes: nempè ſicut A ad B, ita C ad D & E ad F. Dico eſſe ſicut A ad B, ita omnium ſimul A C E, ad omnes ſimul B D F.

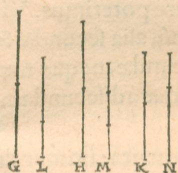


Sumantur ipſarum A, C, E, æquemultiplicia G, H, K: & ipſarum B, D, F, alia vtcunq; æquemultiplicia L, M, N. Eritq;, per primã huius, totũ ex G, H, K, ita multiplex totius ex A, C, E, vt G eſt multiplex A: itidemq; totum ex L, M, N, ita multiplex totius ex B, D, F, vt L eſt multiplex B. Et per conuerſionem ſextæ Definitionis bis ſumptam, ſi G excedit L, & H excedet M, & K excedet N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Itaque, per communem Notionem, ſi G excedit L: excedit & totum ex G, H, K, totum ex L, M, N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Quare, per eandem Definitionem, erit ſicut A ad B, ita totum ex A, C, E, ad totum ex B, D, F, Quod erat probandum.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XIII.
Campano 12.

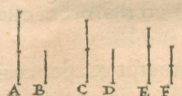
Si primæ ad ſecundam eadem fuerit ratio quæ tertiæ ad quartam: tertiæ verò ad quartam maior fuerit ratio, quàm quintæ ad ſextam: primæ quoque ad ſecundam maior erit ratio, quàm quintæ ad ſextam.

Sit eadem ratio A ad B quæ C ad D: maior autem C ad D, quàm E ad F. Dico maiorem quoque eſſe rationem A ad B, quàm E ad F.



Sumam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: Itemq; L ad B, & M ad D, & N ad F, alia æquemultiplicia.

Et quia eadem eſt ratio C ad D quæ eſt A ad B, ſed maior quàm E ad F: erit, per conuerſionem ſextæ Definitionis, ſi H excedit M, vt G neceſſariò excedat L. At, per conuerſionem octauæ Definitionis, ſi H excedit M, non neceſſariò K excedet N. Si igitur G excedit L, non neceſſariò K excedet N. Quare maior eſt ratio A ad B, quàm E ad F, Quod fuit probandum.



Hoc autem totum nil aliud eſt, quàm Si fuerint duo inter ſe æqualia, vnum verò illorum tertio quopiam maius: erit & reliquum tertio maius.

Ex Campano. Quòd ſi ſit eadem ratio A ad B quæ C ad D, ſed C ad D maior quàm E ad F: erit & A ad B maior quàm E ad F. Nam ſi ſit C ad D minor quàm E ad F: erit E ad F maior quàm C ad D. Per conuerſionem igitur maioris Improportionalitatis, ſi K excedit N, non neceſſariò H excedet M. Sed ſi H non excedit M, neque G excedet L. Per Definitionem igitur maioris Improportionalitatis, maior erit proportio E ad F, quàm A ad B. Itaque econuerſò, minor erit A ad B, quam E F, Quod erat oſtendendum. Sed hoc non admodùm exquiſitæ probationis. Quod autem ſequitur maioris eſt momenti,

Si fuerit primæ quatuor Quantitatum, ad ſecundam maior ratio, quàm tertiæ ad quartam: aliqua erunt æquemultiplicia primæ & tertiæ, quæ quum comparabũtur ad aliqua æquemultiplicia ſecundæ & quartæ, inuenietur multiplex primæ maius eſſe multiplici ſecundæ: non autem multiplex tertiæ, multiplici quartæ. Quod ſic probatur.

Sit maior proportio AB ad C, quàm D ad E. Ponaturque proportio AF ad C ſicut D ad E. Et erit, per hanc & decimam, AF minor AB. Et ſit minor in quantitate FB. Hanc FB multiplicabo, donec proueniat quantitas maior C: quæ ſit

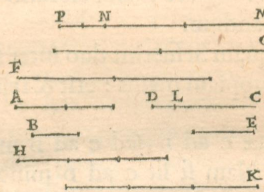
G H : hac lege, ut D toties multiplicata, producat quãtitatem non minorem E : quæ sit K. Tunc faciam vt L G sit tam multiplex A F, quàm G H est multiplex ipsius F B, aut K ipsius D. Eritq; , per primam huius, L H ita multiplex ipsius A B ut K ipsius D. Ponam postmodùm M primam quantitatem multiplicem E, quæ sit maior K : & ponam N ita multiplicem C, vt M est multiplex E. Eritq; ex positionibus, & ex conuersione sextæ Definitionis, quantitas N prima multiplicium C, quæ erit maior L G : nec erit L G minor C. Sumam itaque sub N, maximam multiplicium C : aut ipsi æqualem, si fortè N sit prima multiplicium illius : quæ sit O : Constabitq; N, ex O & C. Quia ergo L G non est minor O, & G N est maior C : erit L H maior N. Quare quum K sit minor M, patet propositio.

HÆC Campanus. Cuius breuitatem ferè vbique laudaui. Hîc verò ob compendium, manca apparet Demonstratio. Non enim satis explicat, quantitatem N esse primam multiplicium quæ sit maior L G. Hoc igitur probandum fuit ex quarta huius. Quum enim sit sicut D ad E, ita A F ad C : sitq; K ipsius D æquemultiplex vt G L ipsius A F : itemq; M ipsius E vt N ipsius C : erit, per quartam huius, sicut K ad M, ita G L ad N. Sed K ad M proximè minor est ipsa M. Et G L igitur proximè minor est ipsa N.

Quod autem dicit, ex positionibus, hoc innuit : quòd quum G L sit eodem modo multiplex ipsius A F, quo & K ipsius D : sitq; D ad E sicut L G ad A F : erit L G maior C, quum K maior quàm E posita sit.

RVRSVS Campanus. Conuersam quoque huius demonstrare poterimus. Videlicet, si reperiantur aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ : itemq; alia secundæ & quartæ æquemultiplicia : & multiplex primæ superet multiplex secundæ, neque multiplex tertiæ superet multiplex quartæ : maior erit proportio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam. Quod sic demonstratur.

Sint quatuor Quantitates, A prima, B secunda : C D tertia, & E quarta : sintq; F ad A & G ad C D æquemultiplicicia : similiter H ad B & K ad E, æquemultiplicia: & F superet H, neque G superet K. Dico maiorem esse rationem A ad B, quàm C D ad E.



Si enim fuerit æqualis : fiet vt G superet K, per conuersionem sextæ Definitionis : quod est contra hypothesin. Si autem minor : ponatur C L ad E sicut A ad B. Eritq; per huius decimam, C L minor C D. Et sit minor in quantitate L D. Ponam igitur vt M N sit ita multiplex C L, & N P ita multiplex L D, sicut F est multiplex A. Eritq; , per primam huius, M P ita multiplex C D vt F est multiplex A. Vtraq; igitur duarum Quantitatũ M P & G, est æquemultiplex Quantitatis C D : quapropter ipsæ inter se æquales, per ea quæ demonstrata sunt in septima huius. Et quia G non est maior K, non erit M P maior eadem. Sed per conuersionem sextæ Definitionis, M N est maior K : quum F sit maior H. Maior igitur M N, ipsa M P, Quod fieri non potest. Quare constat propositio. Hæc ille. Sed ne hæc quidem Demonstratio quicquam habet egregium. Probat enim quod probatione non indiget, immò quod iam sæpe in probationem assumpsimus superiorum Theorematum. Prior tamen non contemnenda : quòd ostendat rationem sic constituendorum Æquemultiplicium, vt multiplex primæ superet multiplex secundæ, sed multiplex tertiæ non superet multiplex quartæ.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIIII.

Si primæ ad secundam eadem fuerit ratio quæ tertiæ ad

quartam,

quartam, prima verò maior fuerit, quàm tertia: erit & ſecunda maior, quàm quarta: Et ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor.

Sit ratio A primæ, ad B ſecundam: vt C tertiæ, ad B quartam: & ſit maior A, quàm C. Dico & B maiorem eſſe quàm D: & ſi æqualis, æqualem: & ſi minor, minorem.

Quum enim A ſit maior quàm C: erit, per priorem partem octauæ huius, maior ratio A ad D, quàm C ad D: ob idq́; , maior A ad D, quàm A ad B. Quare, per ſecundam partem decimæ huius, erit B maior quàm D.

Si verò A ſit æqualis C: erit, per priorem partem ſeptimæ, A ad D ſicut C ad D. Quare, per ſecundam partem nonæ, erit B æqualis D.

Quòd ſi A ſit minor quàm C, erit per priorem partem octauæ, minor ratio A ad D, quàm C ad D: ob id, maior A ad B, quàm ad D. Quare, per ſecundam partem decimæ, erit B minor quàm D. Ac ſic patet Propoſitio.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XV.

Magnitudines inter ſe, eandem habent rationem quam earum Aequemultiplicia inter ſe.

Sint C ad A, & D ad B æquemultiplicia. Dico eandem eſſe rationem C ad D quæ eſt A ad B.

Diuidatur C ſecundùm quantitatem ipſius A: & D ſecundùm quantitatem ipſius B. Eruntq́; tot partes in C, æquales ipſi A: quot in D, ipſi B. Et quia quælibet pars ipſius C, ad quanlibet partem ipſius D, eſt ſicut A ad B: erit, per duodecimam huius, C ad D ſicut A ad B, Quod erat oſtendendum.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVI.

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, permutatim quoque proportionales erunt.

Sit proportio A ad B ſicut C ad D. Dico permutatim, eſſe A ad C ſicut B ad D.

Ponam E ad A, & F ad B æquemultiplices: itemq́; G ad C, & H ad D æquemultiplices. Et erit, per antecedentem, E ad F ſicut G ad H. Itaque, per decimam quartam, ſi E eſt maior G: erit & F maior H: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem huius, erit A ad C ſicut B ad D, Quod erat oſtendendum.

Ex hoc manifeſtum eſt, vt ex Continua proportionalitate fiat Permutata, oportere quatuor Magnitudines eſſe eiuſdem generis.

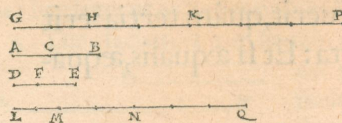
THEOREMA 17, PROPOSITIO XVII.

Si fuerint Magnitudines coniunctim proportionales, diſiunctim quoque proportionales erunt.

Sit proportio AB ad BC ſicut DE ad EF. Dico eſſe AC ad CB ſicut DF ad FE.

Ponam GH ad AC & HK ad CB: item LM ad DF & MN ad FE, ſingulas ſingularum æquemultiplices: Ac rurſus ipſa-

rum

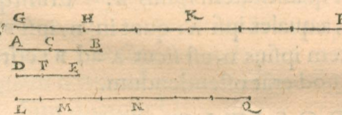


rum C B & F E, alias vtcunque æquemultiplices K P & N Q. Et erit, per primam huius, G K ita multiplex A B vt G H eſt multiplex A C: & L N ita multiplex D E vt L M eſt multiplex D F. Sed quàm multiplex eſt G H ipſius A C, tam multiplex poſita eſt L M ipſius D F: & continuè, quàm multiplex L M ipſius D F, tam multiplex eſt, per primam huius, L N ipſius D E. Quàm multiplex igitur G K ipſius A B, tam multiplex eſt, per vndecimam huius, L N ipſius D E. Et quoniam H K & M N ſunt ipſarum C B & F E æquemultiplices: item K P & N Q, aliæ earundem æquemultiplices: erunt, per ſecundam huius, K P & M Q, earundem C B & F E æquemultiplices. Per conuerſionem igitur ſextæ Definitionis, ſi G K multiplex A B, excedat H P multiplicem C B: excedet L N multiplex D E, ipſam M Q multiplicem F E: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Ablatis itaque communibus H K & M N, ſi G H excedit K P, excedet & L M, per animi Notionem, M Q: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem, erit ſicut A C ad C B, ita D F ad F E, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XVIII.

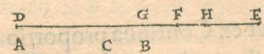
Si fuerint Magnitudines diſiunctim proportionales, coniunctim quoque proportionales erunt.

Manente eodem Magnitudinum poſitu, ſit A C ad C B ſicut D F ad F E. Dico eſſe A B ad B C ſicut D E ad E F. Conuerſa antecedentis.



Singulis enim Æquemultiplicibus ad ſingulas Magnitudines accommodatis: erit, per conuerſionē ſextæ Definitionis, ſi G H excedit K P, vt L M excedat N Q: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quapropter poſitis communibus H K & M N: erit, per communem Notionem, ſi G K excedit H P, vt L N excedat M Q: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Quare, per ſextam Definitionem, erit A B ad B C ſicut D E ad E F, Quod erat demonſtrandum.

ALITER, ſi placet, ab impoſſibili. Quum ſit A C ad C B ſicut D F ad F E: ſed non A B ad B C ſicut D E ad E F: ſit D E ad aliquam aliam, vt ad E G, Magnitudinem, ſicut eſt A B ad B C. Atque ea erit maior ipſa E F, aut minor: Nam ſi æqualis ponatur, erit confeſſa propoſitio. Sit itaque primùm E G maior quàm E F. Et erit, per antecedentem, A C ad C B ſicut D G ad E G. Itaque, per vndecimam huius, erit D G ad E G ſicut D F ad F E. Quare, per decimamquartam eiuſdem, quum D G prima, ſit minor D F tertia: erit G E ſecunda, minor E F quarta. Sed G E poſita fuit maior. Quare euertitur poſitio.



Sit iam ſicut A B ad B C, ita D E ad E H, minorem quàm E F. Et erit, per antecedentem, A C ad C B ſicut D H ad H E. Itaque, per vndecimam, D H ad H E ſicut D F ad F E. Et quia D H prima, eſt maior D F tertia: erit, per decimamquartam, E H ſecunda, maior E F quarta, Quod fieri non poteſt. Quare ſicut A B ad B C, ita D E ad E F, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum: erit & reliquum ad reliquum ſicut totum ad totum.

Quod quinta propoſuit de Multiplicibus, hæc de Magnitudinibus in vniuerſum.

Sit

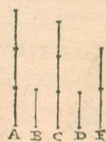
Sit itaque vt totum A B ad totum C D, ita ablatum B E ad ablatum D F. Dico esse & reliquum A E ad reliquum C F, vt totum A B ad totum C D.

Quum enim sit A B ad C D sicut B E ad D F: erit permutatim, A B ad B sicut C D ad D F: & disiunctim, A E ad E B sicut C F ad F D: & iterum permutatim, A E ad C F sicut E B ad F D. Et quia sic erat A B ad C D, constat propositio.

APPENDIX ex Campano. Ex hac & Permutata proportionalitate demonstratur Proportionalitas Euersa. Vt si sit A B ad B E sicut C D ad D F: Dico esse B A ad A E sicut D C ad C F.

Nam quum sit A B ad B E sicut C D ad D F: erit permutatim, A B ad C D sicut B E ad D F. Ob id, per hanc decimamnonam, B A ad D C sicut A E ad C F. Quare permutatim, B A ad A E sicut D C ad C F, Quod erat ostendendum.

CONVERSA quoque Proportionalitas potest demonstrari indirectè, ex Permutata Proportionalitate & nona huius.



Vt si sit proportio A ad B sicut C ad D. Dico esse B ad A sicut D ad C.

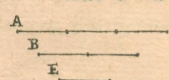
Sin minus: Sit D ad E sicut B ad A. Et quia A ad B est sicut C ad D: erit permutatim A ad C sicut B ad D. Et quia iterum B ad A sicut D ad E: erit quoque permutatim, B ad D sicut A ad E. Quare A ad E sicut A ad C. Si igitur E non sit æquale C: fiet contrà secundam partem nonæ. Si autem æqualis: erit B ad A sicut D ad C, Quod fuit ostendendum. Hæc Campanus. Hoc autem postremùm probatum fuerat suprà ad quartam huius.

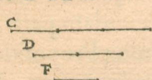
THEOREMA 20, PROPOSITIO XX.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, & aliæ totidem alterius, fuerintq; duæ vnius in eadem ratione cum duabus alterius eodem situ positis, prima autem vnius fuerit maior tertia: erit & prima alterius maior tertia: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

Hoc Theorema cum sequenti, proponitur ad Æquam proportionalitatem probandam.

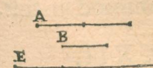
Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: tresq; C, D, F, alterius: sitq; A ad B sicut C ad D: & B ad E sicut D ad E.

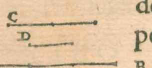




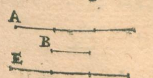
Dico si A est maior E, esse & C maiorem F: & si æqualis, ęqualem: & si minor, minorem.

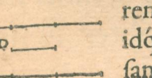
Si enim est maior: erit, per priorem partem octauæ huius, maior ratio A ad B, quàm E ad B: ob id, per duodecimam, maior erit C ad D, quàm E ad B. Et quia, per Conuersam proportionalitatem, E ad B est sicut F ad D: erit C ad D maior quàm F ad D. Quare, per priorem partem decimæ, maior est C, quàm F. Quòd si A sit minor quàm E: probabitur iisdem argumentis C minor quàm F. Erit enim





per priorem partem octauæ, minor ratio A ad B, quàm E ad B: ob idq;, per duodecimam, & per Conuersam proportionalitatem, minor erit C ad D, quàm F ad D. Quare, per priorem partem Decimæ, erit C minor F. Si autem A sit æqualis E, erit per priorem partem septimæ, A ad B sicut E ad B: ob idq;, per secundam partem vndecimæ, & Conuersam proportionalitatem, erit C ad D sicut F ad D.

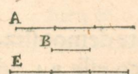
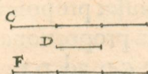




Quare,

Quare, per priorem partem nonæ, erit C æqualis F, Quod erat demonſtrandum.

Hic ſubijcit Campanus. Hanc Propoſitionem demonſtrauerunt quidam ex Permutata proportionalitate, ad hunc modum. Eſt A ad B ſicut C ad D: ergò permutatim A ad C ſicut B ad D. Et rurſus quia B ad E ſicut D ad F: erit permutatim B ad C ſicut E ad F. Sed erat B ad D ſicut A ad C. Ergò, per vndecimam,

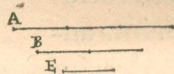
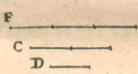



erit A ad C ſicut E ad F. Quare, per decimamquartam, ſi A prima, eſt maior E tertia: erit & C ſecunda, maior F quarta: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Sed ſic non rectè demonſtrant. Nam ſi à Permutata proportionalitate argumentationem, vt cœperunt, perficiant: ij tandem Æquam proportionalitatem concludent: ſcilicet A ad C ſicut E ad F: ergò permutatim A ad E ſicut C ad F, Quæ eſt Æqua proportionalitas. Quòd ſi Euclides ſic concludi poſſe vidiſſet: fruſtrà hoc præmiſiſſet Theorema: ſed Æquam proportionalitatem ſtatim aſtruxiſſet. Quum itaque hæc ratiocinatio non procedat, niſi vtriuſque ordinis Magnitudines ſint eiuſdem generis: minus conuenienter ad ſingulare contrahunt quod Euclides generatim propoſuit.

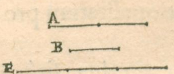
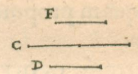
THEOREMA 21, PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq́; Magnitudines alterius, fueritq́; earum Perturbata ratio, prima verò vnius ordinis, fuerit maior tertia: erit quoque prima alterius, maior tertia.

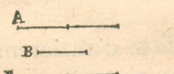
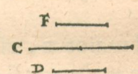
Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: treſq́; aliæ F, C, D, alterius: & ſit proportio inter eas Perturbata: ſcilicet A ad B ſicut C ad D, & B ad E ſicut F ad C. Dico ſi A eſt maior E: eſſe & F maiorem D: & ſi minor, minorem: & ſi æqualis, æqualem.

Hoc autem probatur iiſdem argumentis quibus ſuperior. Si enim A ſit maior E, erit maior ratio A ad B, quàm E ad B: atque ob id, maior C ad D, quàm E ad B: quapropter & maior quàm C ad F: quia vt E ad B, ſic C ad F, per Conuerſam proportionalitatem. Quare, per ſecundam partem decimæ, maior eſt F quàm D.

Quòd ſi A minor ſit quàm E: erit, gradatim argumentando, minor C ad D, quàm ad F. Quare, per ſecundam partem eiuſdem, erit F minor D.

Si verò A ſit æqualis E, erit C ad D ſicut C ad F. Quare, per ſecundam partem nonæ, erit F æqualis D. Ac ſic conſtat Propoſitio.

Hæc itaque cum antecedente, quia ad probationem Æquæ proportionalitatis ſpectat: Æquemultiplicium rationem vtraque præcipuè conſiderat. Atque hunc ſenſum habent, vt non poſſit prima vnius ordinis maior eſſe tertia, quin prima alterius ſit quoque maior tertia: & ſi æqualis, æqualis: & ſi minor, minor. Breuiter, hæc verba exceſſus & æqualitatis omninò ſic accipienda, vt in Definitione ſexta huius. Atq; hoc ad duarum ſequentium intelligentiã monere commodum fuit.

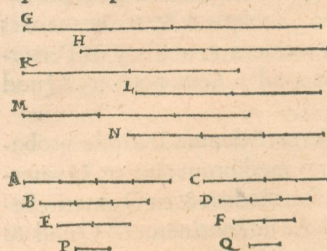
THEOREMA 22, PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq́; alterius, fuerintq́; binæ vnius ordinis in eadem ratione cum binis alterius ſimiliter ſumptis: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint

Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: aliæq; totidem alterius, C, D, F: sitq; A ad B sicut C ad D, & B ad E sicut D ad F. Dico esse A ad E sicut C ad F.

Ponam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: itemq; K ad B, & L ad D, alia æquemultiplicia. Rursus M ad E, & N ad F, alia æquemultiplicia. Et erit per



quartam: aut, si mauis, per decimamquartã huius, G ad K sicut H ad L: & K ad M sicut L ad N. Itaque, per vigesimam eiusdem, si G est maior M, erit H maior N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem huius, erit A ad E sicut C ad F, Quod fuit ostendendum.

IAM verò si fuerint Magnitudines plures tribus in vtroque ordine: erit omninò prima ad vltimam vnius, vt prima ad vltimam alterius: scilicet in Æqua proportionalitate. Vt, si addantur P & Q: & sit E ad P sicut F ad Q: Dico esse A ad P sicut C ad Q. Erit enim A ad E sicut C ad F, vt modò demonstrauimus. Sepositis igitur B & D, erunt tres Magnitudines A, E, P, vnius ordinis, tresq; alterius C, F, Q, eiusdem conditionis cum prioribus. Quare A ad P sicut C ad Q, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq; alterius, fueritq; perturbata inter ipsas ratio: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint tres Magnitudines vnius ordinis A, B, C: atque aliæ totidem alterius D, E, F. Sitq; A ad B sicut E ad F: & B ad C sicut D ad E. Dico esse A ad C sicut D ad F.



Ponam G, H, K, ad A, B, D, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N, ad C, E, F, æquemultiplicia. Et erit, per decimamquintam huius, vt A ad B, sic G ad H. Et quoniam vt A ad B, sic E ad F: erit, per vndecimam, vt G ad H, sic E ad F. Quumq; sit vt E ad F, sic M ad N, per ipsam decimamquintam: erit & per vndecimam, vt G ad H, sic M ad N. Et quoniam vt B ad C, sic D ad E: erit per quartam huiusce, vt H ad L, sic K ad M. Sunt itaque G, H, L tres Magnitudines, & K, M, N aliæ totidem, perturbatim proportionales. Si igitur G excedit L, & K excedet N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit vt A ad B, sic D ad F, Quod erat ostendendum.

ALITER possunt sumi Æquemultiplicia. Sint enim tres Magnitudines vnius ordinis A, B, E, totidemq; F, C, D, alterius: & sit vt A ad B, sic C ad D: & vt B ad E, sic F ad C. Dico esse A ad E sicut F ad D.

Sumam G, H, K ad A, C, F, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N ad B, E, D, æquemultiplicia. Et erit, per quartam huius, G ad L sicut H ad N: &, per decimamquintam, L ad M sicut K ad H. Erunt itaque, vt priùs, Æquemultiplicia vtriusque ordinis, in ratione perturbata inter se. Ob id, per vigesimamprimam, si G excedat M, & K excedet N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit vt A ad E, sic F ad D, Quod erat probandum.



Quod si plures tribus fuerint Magnitudines in vtroque ordine: verbi causa, quatuor: sitq; A ad B sicut D ad Q: & B ad E sicut C ad D: & E ad P sicut F ad C: erit & in æqua proportionalitate, A ad P sicut F ad Q. Nam quum probatum sit A ad E sicut C ad Q: sublatis B & D, erunt tres quantitates, A, E, P, aliæq; totidem F, C, Q, in Perturbata ratione inter se. Quare A ad P sicut F ad Q, Quod erat demonstrandum.

Ac quemadmodum ex Ternarij demonstratione probatur Quaternarius, seposito vno mediorum: ita ex Quaternario Quinarius, duobus sepositis medijs: & ex Quinario Senarius, tribus semotis medijs. Ac sic continenter. Quod & in superiori specie Æquæ proportionalitatis intelligendum Quamobrem, quum Ternarius totam probationem absoluat, disertè Euclides de tribus tantùm Magnitudinibus proposuit.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXIIII.

Si fuerit primum ad secundum, vt tertium ad quartum: & item quintum ad secundum, vt sextum ad quartum: erit & compositum ex primo & quinto ad secundum, vt compositũ ex tertio & sexto ad quartum.

Quod secunda proposuit de Multiplicibus, hæc generatim de Magnitudinibus proponit.

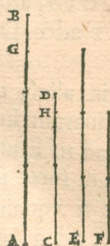
Sit itaque AB ad C vt DE ad F: itemq; BG ad C vt EH ad F. Dico esse AG ad C sicut DH ad F.

Erit enim, per Conuersam proportionalitatem, C ad BG vt F ad EH: quapropter ex vigesimasecunda: erit in Æqua ratione AB ad BG vt ED ad EH: sumptis scilicet AB prima, C secunda, & BG tertia, vnius ordinis: atque DE prima, F secunda, & EH tertia, alterius. Igitur, per decimamoctauam, AG ad GB vt DH ad HE. Quare quum sit posita BG ad C vt EH ad F: sumptis AG prima, BG secunda, & C tertia, vnius ordinis: atque DH prima, EH secunda, & F tertia, alterius: erit per vigesimamsecundam, in Æqua ratione, AG ad C vt DH ad F, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXV.

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sint quatuor Magnitudines proportionales: AB, CD, E, & F: vt AB ad CD, sic E ad F: sitq; earum maxima AB, minima verò F. Dico ambas AB & F, maiores esse ambabus CD & E.



Ponam AG æqualem ipsi E: & CH æqualem ipsi F. Et quoniam sicut tota AB ad totam CD, sic ablata AG ad ablatam CH erit & reliqua GB, per decimamnonam huius, ad reliquam HD, sicut tota AB ad totam CD. Maior autem est AB ipsa CD: Et maior igitur GB ipsa HD. Et quoniam æqualis est AG ipsi E, & CH ipsi F: erũt AG & F æquales ipsis CH & E. Addita ergo GB maiori ad duas AG & F: & HD minori ad duas CH & E: fient, per communem sententiam, AB & F, maiores quàm CD & E, Quod erat demonstrandum.

HACTENVS Euclides huius Quinti Proportiones tradidit. Nouem autem ſequentes Propoſitiones à Campano additæ ſunt, ex alieno quopiam exemplari. ſicut & ſæpè aliâs ordinem Euclidis deſerit, pauca prætermittit, nonnulla ſubſtituit, aliaq; addit de ſuo. Neque infelici opera. Pleraque enim in demonſtrando facit meliora & clariora, compendij officio: licet in quibuſdam dormitet. Vt vt eſt, Campani conſtructionem retinuit incitando Euclide, Ioannes Regiomontanus noſtræ ætatis Mathematicus clariſſimus. Quin & ſequentes Propoſitiones ab eo citatas inuenimus, in ea quam in Ptolemæum reliquit Epitome. Quæ res effecit vt illas apponeremus: alioqui libenter prætermiſſuri. Nam præter id quòd probationes quas ex ijs venatur Regiomontanus, abundè ex Euclide conſtant: etiam in hac Proportionum materia mihi videntur Propoſitiones reſecandæ potius quàm in longiùs ducendæ. Nam quæ per ſe claræ ſunt, locum tantùm occupant: ingenium etiam onerant. Tædium enim multitudo vbique parit. Eæ itaque ſic habent.

Prima Additarum.

Si fuerit quatuor Quantitatum proportio primæ ad ſecundam, maior quàm tertiæ ad quartam: erit conuerſim econtrariò, ſecundæ ad primam, minor quàm quartæ ad tertiam.

Sit proportio A ad B maior quàm C ad D. Dico conuerſim econtrariò, minorem eſſe proportionem B ad A, quàm D ad C.

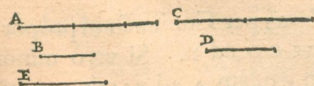
Si enim eſt eadem B ad A, quæ eſt D ad C: erit econuersò A ad B vt C ad D, contra hypotheſin. Si verò maior eſt B ad A, quàm D ad C: ponatur E ad A vt D ad C. Eritq;, per duodecimam, E ad A minor quàm B ad A. Quapropter ex priori parte decimæ, erit E minor B: ob idq;, ex ſecunda parte octauæ, maior erit proportio A ad E, quàm A ad B. Et quia, per Conuerſam proportionalitatem, eſt A ad E ſicut C ad D: erit, per duodecimam, proportio C ad D maior quàm A ad B. Sed erat minor. Ex repugnantia igitur, aſtruitur propoſitio.

Poſſumus & affirmatè demonſtrare. Ponatur E ad B vt C ad D. Et erit econuersò B ad E vt D ad C. Et quia maior eſt A quàm E, per priorem partem decimæ: erit, ex ſecunda parte octauæ, B ad A minor quàm B ad E. Quare, per duodecimam, B ad A minor quàm D ad C, Quod erat probandum.

II.

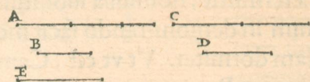
Si quatuor Quantitatum fuerit maior proportio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam: erit permutatim, maior proportio primæ ad tertiam, quàm ſecundæ ad quartam.

Sit maior proportio A ad B, quàm C ad D. Dico permutatim, maiorem eſſe A ad C, quàm B ad D.



Eadem enim non erit: quia tunc quoque eſſet permutatim, A ad B ſicut C ad D. Quòd ſi ſit minor: ponatur E ad C vt B ad D. Eritq; ex duodecima, E ad C maior quàm A ad C. Itaque, ex priori parte decimæ, erit E maior quàm A. Quapropter, ex priori parte octauæ, E ad B maior quàm A ad B. Et quia poſita eſt E ad C ſicut B ad D: erit permutatim,

tatim, E ad B sicut C ad D. Quare ex duodecima, maior erit proportio C ad D, quàm A ad B, Quod est contra hypothesin.



IDEM per affirmationem. Sumatur E ad B vt C ad D. Eritq; ex priori parte decimæ, E minor A: propterea quòd, ex priori parte octauæ, maior est A ad C, quàm E ad C. Sed ex Permutata proportionalitate, est E ad C vt B ad D. Quare, per duodecimam, A ad C maior quàm B ad D, Quod erat ostendendum.

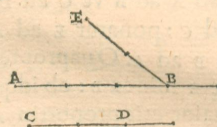
III.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ ad secundam sit maior proportio, quàm tertiæ ad quartam: erit quoque coniunctim, maior proportio primæ & secundæ ad secundam, quàm tertiæ & quartæ ad quartam.

Sit maior proportio A ad B, quàm C ad D. Dico & maiorem esse proportionem totius AB ad B, quàm totius CD ad D.

Neque enim erit eadem: quia sic quoque disiunctim esset A ad B vt C ad D.

Quod si sit minor: sit EB ad B vt CD ad D. Eritq; ex duodecima huius, EB ad B maior quàm AB ad B. Itaque, ex priori parte decimæ, maior est ipsa EB quàm tota AB. Et per communem Notionem, E maior quàm A. Quapropter, ex priori parte octauæ, maior est proportio E ad B, quàm A ad B. Sed E ad B est vt C ad D, per Disiunctam proportionalitatem: erat enim EB ad B vt CD ad D. Quare, per duodecimam, C ad D maior est, quàm A ad B, Quod est contra hypothesin.

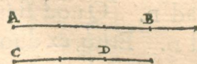


IDEM affirmatè. Quum posita sit maior proportio A ad B, quàm C ad D: ponatur E ad B vt C ad D. Eritq; ex priori parte decimæ, E minor A. Ob id, per animi Notionem, EB erit minor quàm AB. Itaque, ex priori parte octauæ, maior erit proportio AB ad A, quàm EB ad B. At proportio EB ad B, per Coniunctam proportionalitatem, est sicut CD ad D. Posita enim est E ad B vt C ad D. Quare, per duodecimam, maior est AB ad B, quàm CD ad D, Quod erat ostendendum.

IIII.

Si fuerint quatuor Quantitates: quarum primæ & secundæ ad secundam sit maior proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit quoque disiunctim proportio primæ ad secundam maior quàm tertiæ ad quartam.

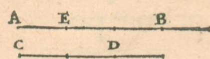
Sit proportio AB ad B maior quàm CD ad D. Dico & disiunctim, A ad B maiorem esse, quàm C ad D.



Æqualis quippe non erit. Nam, per Coniunctam proportionalitatem, esset AB ad B vt CD ad D. Si verò minor esse possit, vt sit maior C ad D, quàm A ad B: erit, per antecedentem, maior CD ad D, quàm AB ad B. Quod minimè conuenit: quum posita sit minor.

IDEM

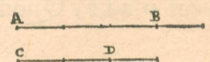
IDEM affirmatè. Ponatur EB ad B vt CD ad D. Eritq́;, ex priori parte decimæ, EB minor quàm AB: ob id, per animi Notionem, E est minor quàm A. Quare, ex priori parte octauæ, proportio E ad B minor est quàm A ad B, Quod erat ostendendum.



V.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ & secundæ ad secundam maior sit proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit euersim, minor proportio primæ & secundæ ad primam, quàm tertiæ & quartæ ad tertiam.

Sit maior proportio AB ad B, quàm CD ad D. Dico euerso modo, minorem esse AB ad A, quàm CD ad C.

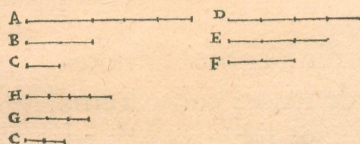


Erit enim disiunctim, per antecedentem, maior proportio A ad B, quàm C ad D. Igitur, per primam harum, econuersò, minor B ad A, quàm D ad C. Quare, per tertiam earundem, coniunctim, minor erit AB ad A, quàm CD ad C, Quod erat demonstrandum.

VI.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, totidemq́; alterius: fueritq́; primæ priorũ ad secundam, maior proportio, quàm primæ posteriorum ad secundam: erit quoque primæ priorum ad tertiam, maior proportio, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnius ordinis A, B, C: aliæq́; totidem alterius, D, E, F. Et sit maior proportio A ad B, quàm D ad E: Itemq́; maior B ad C, quàm E ad F. Dico maiorem esse A ad C, quàm D ad F.



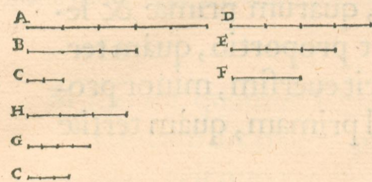
Sit enim G ad C vt E ad F. Eritq́;, ex priori parte decimæ huius, G minor B. Ob id, ex secunda parte octauæ, maior est ratio A ad G, quàm A ad B. Multò maior igitur est A ad G, quàm D ad E. Sit itaque H ad G vt D ad E. Eritq́; ex priori parte decimæ, A maior quàm H. Ob idq́;, ex priori parte octauæ, maior ratio A ad C, quàm H ad C. Atqui H ad C, per Æquam proportionalitatem, est vt D ad F: est enim H ad G vt D ad E: & G ad C vt E ad F. Quare, per duodecimam, A ad C maior est, quàm D ad F, Quod erat demonstrandum.

VII.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, totidemq́; alterius, fueritq́; proportio secundæ priorum ad tertiam maior quàm primæ posteriorum ad secundam, itemq́; primæ priorum ad secundam, maior quàm

secundæ posteriorum ad tertiam: erit & maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnius ordinis, A, B, C: & aliæ totidem D, E, F, alterius: sitq́; maior proportio B ad C, quàm D ad E: & maior A ad B, quàm E ad F. Dico maiorem esse A ad C, quàm D ad F. Hęc ad Æquam proportionalitatẽ pertinet.



Sit enim G ad C vt D ad E. Et erit, per priorem partem decimæ huius, G minor B: ob id, per secundam partem octauæ, maior proportio A ad G, quàm ad B. Quapropter multo maior A ad G, quàm E ad F. Sit itaque H ad G vt E ad F. Eritq́;, ex priori parte decimæ, A maior H: ob idq́;, proportio A ad C maior quàm H ad C, per priorem partem octauæ. Atqui, per vigesimamtertiam, proportio H ad C est vt D ad F: quum sit G ad C vt D ad E, & H ad G vt E ad F. Quare, per duodecimam, maior est proportio A ad C, quàm D ad F, Quod erat demonstrandum.

VIII.

Si fuerit proportio totius ad totum, maior quàm ablati ad ablatum: erit & reliqui ad reliquum, maior proportio, quàm totius ad totum.

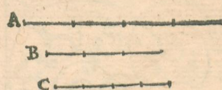
Sint duæ Quantitates, AB & CD: à quibus abscindantur AE & CF, sintq́; reliqua EB & FD: & sit maior proportio AB ad CD, quàm AE ad CF. Dico & maiorem esse proportionem EB ad FD, quàm AB ad CD. Erit enim, per secundam additarum, permutatim, maior proportio AB ad AE, quàm CD ad CF. Ob idq́;, ex quinta earundem, erit euersim, minor proportio AB ad EB, quàm CD ad CF. Quare rursus permutatim, minor proportio AB ad CD, quàm EB ad FD, Quod erat demonstrandum.

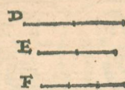
IX.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, ac totidem alterius, fuerit'q; cuiuslibet antecedentis ad comparem, maior proportio, quàm cuiusquam subsequentis ad suam: erit & harum omnium ad omnes illas maior proportio, quàm alicuius subsequentium ad suã comparem, aut etiam quàm omnium ad omnes: minor autem, quàm prima ad primam.

Sint tres Magnitudines vnius ordinis, A, B, C: ac totidem alterius, D, E, F: sitq́; maior proportio A ad D, quàm B ad E: & B ad F, quàm C ad F. Dico proportionem ABC simul sumptarum, ad DEF simul sumptas, maiorem quàm B ad E, & quàm C ad F: maiorem etiam quàm B & C simul sumptarum ad E & F simul sumptas: minorem autem, quàm A ad D.

Quum enim sit A ad D maior quàm B ad E: erit permutatim, A ad B maior quàm





quàm D ad E : & coniunctim, A B ad B, maior quàm D E ad E. Et iterum permutatim, A B ad D E maior quàm B ad E. Quare, per antecedentem, A ad D maior quàm A B ad D E. Atque eodem modo probabitur maior ratio B ad E, quàm B C ad E F. Maior itaque est A ad D, quàm B C ad E F. Quare permutatim, maior est A ad B C, quàm D ad E F. Et coniunctim, maior A B C ad B C, quàm D E F ad E F : Et iterum permutatim, maior A B C ad D E F, quàm C B ad E F: Quare, per antecedentem, maior est A ad D, quàm A B D ad D E F, Quod erat demonstrandum.

Libri Quinti Geometricorum Elementorum

FINIS.





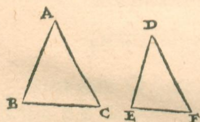
IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER SEXTVS.



DEFINITIONES.

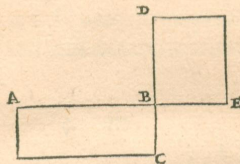


Imiles Figuræ dicuntur, quæ angulos æquales habent ad vnũ, & latera quæ angulos æquales habent, proportionalia.



Vt si fuerint duorum Triangulorum ABC & DEF, anguli mutuò æquales: nempè angulus A angulo D: & angulus B angulo E: fueritq́; latus AB ad latus DE, vt AC ad DF & BC ad EF: erunt hæc duo Triangula similia.

2 Reciprocæ Figuræ dicuntur, quum vtriusque ipsarum mutua latera fuerint proportionalia.



Vt si fuerint duæ Figuræ, verbi gratia, Quadrilateræ, ABC & DBE: fueritq́; latus AB ad latus BD, sicut latus BE ad latus BC: hæ duæ dicuntur Reciprocæ. Sic enim stat proportionalitas, vt duo latera vnius sint antecedentia, & duo alterius sint consequentia. Atque eam ob causam, à nonnullis satis apposité vocantur Figuræ mutuorum laterum.

3 Per mediam & extremam rationem diuidi recta linea dicitur, quum sic fuerit tota ad maius segmentum, vt maius segmentum ad minus.

Id est, quod vulgò dicitur, linea diuidi secundùm proportionem habentem medium & duo extrema. Vt si fuerit linea AB sic diuisa in puncto C, vt sit tota AB ad segmentum AC, vt idem AC ad CB.

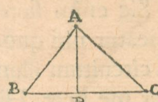
A C B

Hanc diuisionem docuit vndecima Secundi, sed nulla proportionum mentione: quod nominatim docebit trigesima huius.

4 Altitudo Figuræ, est linea à vertice ad basin perpendiculariter deducta.

Triang

Trianguli A B C altitudo, eſt perpendicularis A D. Rectum enim, vt anteà monuimus, omnia metitur. Vbi duarum linearum æquidiſtantia intelligitur: ſcilicet linea duci per punctum A, quæ ſit baſi B C parallelus. Quòd ſi baſis poneretur A B, huic duceretur parallelus per punctum C: ſicut & ipſi A C (ſi fungeretur vice baſis) per punctum B. Atque ab eo puncto vbi vertex eſſet, demitteretur perpendicularis, quæ altitudinem monſtraret.



Ratio ex duabus rationibus aut ex pluribus conſtare dicitur, quum rationes Quantitatum inter ſe multiplicatæ, aliquam rationem efficiunt.

Rationes Quantitatum hoc loco dicuntur denominationes ipſarum proportionum. Ob id, vocem Quantitatis generaliorem quàm Magnitudinis vſurpauit, vt ſignificaret hunc locum ſine Numerorum conſideratione præteriri non poſſe.

Si itaque fuerint tres Quantitates A B, C D, & E F, quarum C D media: conſtabit ratio primæ A B ad vltimam E F, ex ductu rationis quam habet A B ad C D in rationem quam habet C D ad E F.



Hoc igitur totum ex eo ſumptum eſt, quòd Medij officium ſit, extrema coniungere & colligare. Quod nos Numerorum auxilio declarabimus.

Ponatur enim ratio A B primæ ad C D mediam, ſeſquiplex ſeu ſeſquialtera: ſed C D mediæ ad E F extremam, dupla. Scilicet, quum A B ad C D ſit ſeſquialtera: qualium partium eſt A B trium, talium C D ſit duarum: Quumq; C D ſit ad E F dupla: qualium duarum eſt C D, talis ſit E F vnius. Habes itaque duos Denominatores Proportionum, nempè $\frac{3}{2}$ & $\frac{2}{1}$: quos ſi inter ſe multiplicaueris, conflabitur Denominatio primæ A B ad vltimam E F: ſcilicet Tripla.

Iam ſi plura ſint Media, eadem etiam ex ijs conſtabit ratio, ac ſi vnicum eſſet. Vt ſi inter A B & E F, earundem quas poſuimus partium, ſtatuatur alterum Medium G H: manebit etiamnum ratio A B ad E F compoſita ex tribus rationibus, quæ ex duabus modò componebatur, quantacunque ſit G H.



Sit enim vt priùs, A B ad C D ratio ſeſquialtera: C D verò ad G H: ſubdupla: erit G H ad E F, quadrupla. Ducantur iam tres Denominatores inter ſe: ſcilicet $\frac{3}{2}$ in $\frac{1}{2}$, fit $\frac{3}{4}$: Et $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{1}$, fit $\frac{12}{4}$, id eſt Tripla denominatio. Quare, vt priùs, A B ad E F tripla ratio, ſed ex tribus rationibus compoſita. Quot igitur erunt termini, vt vocant, in tot partes diuidetur ratio primę Quantitatis ad vltimam, dempta vnitate: ſeu mauis, quot medij erunt termini, in tot partes diuidetur ratio, ac præterea in vnam. Atque vt vno verbo dicam, inter duas Quantitates, alias medias Quantitates collocare: nil aliud eſt, quàm proportionem ambarum in partes arbitrarias diuidere. Atque hoc ſatis eſſe putamus ad præſens inſtitutum. Hæc enim qui ampliora cupiet, ex Arithmeticis petat. Proportionum verò materiam in Tertio noſtræ Arithmeticæ Libro abundè tractauimus.

S C I O N O N defuturos qui non probent, quòd Quantitatum rationes dixerim: non vt Euclides reliquit, Rationum quantitates. Quibus ego breuiter reſpondeo, me id vt doctrinæ conſulerem feciſſe. Nam ſi exempli cauſa quantitatem 4 ad quantitatem 2, duplam habere rationem dixero, ſcienter & ſignificanter dixero. Si verò rationi duplæ quantitatem eſſe: obſcurè & implicatè. Nam quum Quantitati ratio inſit: rursùs Rationi quantitatem ineſſe, circuitionem importat, quæ in diſciplinis maximè fugienda eſt. Ratio igitur nobis ea eſt, quæ denominationem præ ſe fert: vt dupla, tripla, & quæ ſunt eiuſmodi. Atque hæ inter ſe multiplicant

plicantur: ſcilicet dupla ratio in triplam, quæ ſextuplam parit: ac cæteræ ſuo modo. Neque hîc Quantitas in Quantitatem ducitur, vt linea in lineam. Sic enim fieret Parallelogrammum: quod huic loco eſt alienum. At nihil multiplicatur niſi quod quantum eſt. Certè. Et fateor quidem Rationes quantas eſſe. Sed circuitum illum vitare volui. Vnicuique tamen vt quantitates Rationum dicat, per me licet. Hîc enim agitur non dicendi, ſed docendi ratio.

ID ETIAM obiter monebimus, hanc Rationum compoſitionem, non eſſe Proportionum Additionem, vt quidam putarunt. Aliud quippè eſt, Rationes alias ex alijs componere, & aliud Rationes rationibus adiungere. Quod & in Arithmeticis docuimus. Nos ad Propoſitiones ingrediamur.





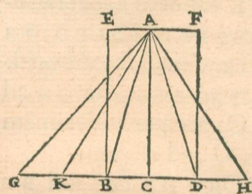
THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.



TRiangula eiusdem altitudinis, itidem & Parallelogramma, inter se sunt vt bases.

Sint duo Triangula ABC & ACD, eiusdem altitudinis. Dico vt est BC basis ad CD basin, sic esse ABC Triangulum ad ACD Triangulum. Sint etiam Parallelogramma CE & CF, eiusdem altitudinis. Dico itidem vt BC basis ad CD basin, sic CE Parallelogrammum ad FC Parallelogrammum.

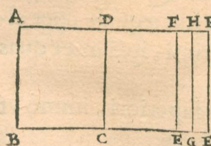
Producam BD vtrinque in G, H puncta: Et ponam duas BK & KG ipsi CB ęquales: & DH ipsi CD. Tum connectam AG, AK, & AH. Eruntq; Triangula ABC, AKB, & AGK inter se æqualia, per trigesimamoctauam Primi: itidem & Triangula ACD & ADH, per eandem, inter se æqualia. Ac proindè Triangulum AGC tam multiplex Trianguli ABC, quàm basis GC multiplex ipsius basis BC. Itemq; Triangulum ACH, Trianguli ACD tam multiplex, quàm basis CH ipsius basis CD. Et per eandem Primi, si GC basis æqualis est CH basi: erit & Triangulum AGC æquale Triangulo ACH: & si maius, maius: & si minus, minus. Est igitur, per sextam Definitionem Quinti, sicut BC basis ad CD basin, ita ABC Triangulum ad ACD Triangulum, Quod est prius.



Quumq; Parallelogrammum EC duplum sit Trianguli ABC, per quadragesimamprimam Primi: & Parallelogrammum FC, duplum Trianguli ACD, per eandem: erit, per decimamquintam Quinti, vt Triangulum ABC ad Triangulum ACD, sic Parallelogrammum EC ad Parallelogrammum FC, Quod fuit demonstrandum.

HOC AVTEM in communi iudicio totum positum est. Quod sic probabimus, vt Demonstrationis vice esse possit: simul ostendemus quánam ratione inducatur Trigesimaoctaua Primi ad probationem excessus & imminutionis Æquemultiplicium, quum ipsa de æqualitate tantùm proposuerit.

Sit Parallelogrammum ABCD, eiusdem altitudinis vt Parallelogrammum DCEF. Dico vt est BC basis ad CF basin, sic esse ABCD Parallelogrammum ad DCEF, Parallelogrammum.



Primùm enim si æquales sint bases, non est dubium quin eadem sit ratio basium & Parallelogrammorum: quum sint & Parallelogramma æqualia, per ipsam Trigesimamoctauam Primi. Si verò inæquales fuerint: neque Parallelogramma æqualia esse possunt, per eandem. Sit ergo BC maior CE, quam excedat quantitate EG: vt scilicet CG sit æqualis ipsi BC. Et ducatur parallelus GH, perficiaturq; Parallelogrammum DCGH. Et erit ex ipsa iam inducta Propositione, Parallelogrammum ABCD æquale Parallelogrammo DCGH. Quapropter, ex communi Notione, sicut DCGH maius est DCEF, ita ABCD maius est eodem DCEF. Ac proptereà, quum BC maior sit CE, erit simul ABCD maius DCEF. Simili argumentatione probabitur, si BC minor sit CB, simul ABCD maius esse ipso DCEF. Vnde colligitur vt BC basis ad CE basin, ita ABCD Parallelogrammum ad DCEF Parallelogrammum. Nihil enim refert vtrum dicas, non posse esse primum maius secundo, quin tertium sit maius quarto: neque æquale, quin æquale: neque minus quin minus: an verò dicas, vt

primum

primum ad secundum, ita tertium ad quartum: licet illud nominatim ab Euclide positum sit Æquemultiplicium gratia, vt notum est ex Quinto. Atque hoc dictum volui, vt vbique admonerem, Æqualitatem esse omnium Proportionum originem & ducem.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

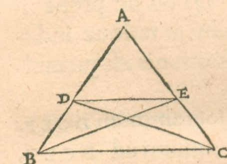
Si Trianguli duo latera recta linea sic secet, vt ipsa ad reliquum sit parallelus: duo latera proportionaliter secabit: & si proportionaliter duo latera secet: erit ipsa ad reliquum parallelus.

Sit Triangulum ABC, cuius duo latera AB & AC sic secet recta DE, vt ipsa sit lateri BC parallelus. Dico priùs vt est BD ad DA, sic esse CE ad EA.

Connectantur BE & CD. Eritq;, per trigesimamseptimam Primi, Triangulum BED æquale Triangulo CED: Sunt enim inter Parallelos DE & BC, & eandem habent basin ED. Vtrunque igitur ad Triangulum AED eandem habet rationem, per septimam Quinti. Erit itaque vt BED ad AED, ita BD ad DA, per antecedentem: quum eundem habeant verticem E: similiter, per eandem, sicut CED ad AED, ita CE ad EA: eundem enim habent verticem D. Quare, per vndecimam Quinti, BD ad DA, sicut CE ad EA, Quod est prius.

Iam sit BD ad DA vt CE ad EA. Dico DE esse ipsi BC parallelum. Erit enim, per antecedentem & per vndecimam Quinti, Trianguli AED ad vtrunque BED & CED, proportio vna. Itaque, per secundam partem nonæ Quinti, duo BED & CED Triangula æqualia. Quare quum eandem habeant basin DE, & ex eadem parte: erunt, per Trigesimamnonam Primi, inter duas Parallelos, Quod erat demonstrandum.

HVIVS etiam Theorematis rationem ab Æquali ductam esse satis manifestum est. Sit enim Triangulum ABC duorũ laterum AB & AC æqualium, quæ secentur à linea recta DE, quæ ipsi BC sit parallelus. Et constat ex vigesimanona Primi, quatuor angulos B, C, D, & E, esse æquales: vnde per quintam eiusdem, duo AD & AE latera, Trianguli AED, æqualia. Ex communi igitur Notione, DB ipsi EC æqualis. Quare AD ad DB vt AE ad EC, Quod est prius.



Iam connectantur BE & CD. Et quoniam ponitur AD ad DB vt AE ad EC: erit per antecedentem & per vndecimam Quinti, Trianguli ADE ad vtrunque BDE & CED proportio vna. Vtrunque igitur æquale, per alteram partem nonæ Quinti. Quare, per trigesimamnonam Primi, ipsa inter duas Parallelos consistunt, Quod erat ostendendum.

Vides Parallelorum officio conseruari ius Æqualitatis: vt in superiori, immò vt in Demonstrationibus Geometricis passim apparet.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si recta linea angulum Trianguli bifariam secans, secuerit & basin: erunt duo segmenta inter se, sicut duo reliqua Trianguli latera: Et si segmenta fuerint vt duo reliqua Trianguli latera: linea basin secans, & angulum oppositum bifariam secabit.

Sit

Sit Triangulum ABC, cuius angulum A diuidat linea AD bifariam. Dico BD ad DC esse vt AB ad AC. Et si BD ad DC vt AB ad AC: angulum bifariam esse diuisum.

Ducam BE æquidistantem DA: Et protraham CA donec concurrat cum BE ad punctum E. Et erit, per priorem partem vigesimænonæ Primi, angulus EBA æqualis angulo BAD. Et, per alteram partem eiusdem, angulus E æqualis angulo DAC. Quapropter, ex animi Notione, angulus E æqualis angulo ABE. Itaque, per sextam Primi, AB & AE æquales. Ob idq;, per priorem partem septimæ Quinti, erit EA ad AC vt AB ad AC. At, per antecedentem, EA ad AC vt BD ad DC. Quapropter AB ad AC vt BD ad DC, Quod est prius.

Sit iam, manente eadem constructione, AB ad AC vt BD ad DC. Et quia, per antecedentem, EA ad AC est vt BD ad DC: erit EA ad AC, vt AB ad AC. Itaque, per priorem partem nonæ Quinti, EA & AB sunt æquales. Quapropter, per quintam Primi, duo anguli E & EBA æquales. Quare, per vigesimamnonam Primi & animi Notionem, angulus BAD æqualis est angulo CAD, Quod fuit probandum.

Est autem hæc constructio dimidia pars illius Figuræ Gnomonicæ quam in Quadragesimatertia Primi ad omnes Demonstrationes Geometricas locupletissimam esse diximus: quæq; omnibus ferè huius libri Sexti Propositionibus accommodatur, vt posteriùs cognoscent qui compositiones Figurarum diligenter attenderint.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Aequiangulorum Triangulorum, latera quæ circũ ęquales angulos, sunt proportionalia.

Sint Triangula ABC & DEF æquiangula: sitq; angulus A, æqualis angulo D: & angulus B, angulo E: & angulus C, angulo F. Dico esse DE ad AB & DF ad AC, sicut EF ad BC.

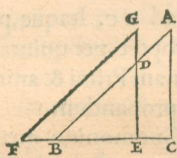
Producam vnum laterum alterutrius Trianguli, vt latus EF: & faciam FC æqualem BC. Tum à puncto F ducam FA æquidistantem ED, & æqualem ipsi AB: Et connectam AC. Eritq; Triangulum AFC æquale & æquilaterum Triangulo ABC, per quartam Primi: propterea quòd angulus AFC æqualis est angulo E, per vigesimamnonam eiusdem, & duo latera AF & FC posita sunt æqualia duobus AB & BC. Ob id, angulus FAC æqualis angulo BAC: ob idq;, angulo D. Reliquus igitur EFD, reliquo C æqualis. Itaq;, per priorẽ partem vigesimæoctauæ eiusdem, AC & DF Paralleli. Productis igitur CA & ED, compleo Parallelogrammum FG. Et erit, per trigesimamquartã Primi, AG æqualis DF: & DG ęqualis AF. Quoniam ergo, per secundam huius, GA ad AC sicut EF ad FC: & per eandẽ, EF ad FC sicut ED ad DG: erit, per septimam Quinti, DF (quia æqualis GA) ad AC: ac, per eandẽ, ED ad FA (æqualem ipsi DG) sicut EF ad FC, Quod fuit demonstrandum.

Aliter vt Theon. Eadem constructione, erit per secundam huius, vt ED ad DG (ac propterea per vndecimam Quinti, vt ED ad FA) sic EF ad FC. Et permutatim igitur, per decimamsextam Quinti, vt ED ad EF, sic FA ad FC. Rursus, per eandem huius, vt EF ad FC, ita GA (ac propterea, ita DF) ad AC: Et permutatim vt EF ad DF, ita FC ad AC. Sed probatum est vt ED ad EF, sic FA ad AC. Ex æquali igitur, per vigesimamsecundam Quinti, vt ED ad DF, ita FA ad AC. Quare Triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, Quod erat demonstrandum.

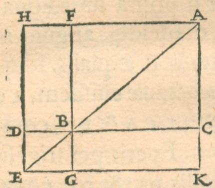
QVVM autem hoc Theorema ſit vſitatiſſimum, neque ferè vllum in Dimenſionibus occurrat frequentius: triplicem Triangulorum Æquiangulorum conſtitutionem exponendam eſſe duximus: quarum primam iam tradidimus, ex veterum præſcripto: ſcilicet, quum Triangula ſuper eandem lineam rectam conſtruuntur: qualia hoc loco EDF & FAC, ſuper lineam EC: niſi quòd compoſitionem aliquantùm variauimus: ſchemate tamen eodem retento. Altera igitur oſtenſionis ratio erit ex Triangulis Æquiangulis, quæ aliud in aliud inſeruntur.

Sint duo Triangula ABC & DBE, æquiangula: vt angulus A ſit æqualis angulo D: & angulus B vnius, æqualis angulo B alterius: angulusq́; C, angulo E. Dico eſſe BD ad BA & BE ad BC, vt DE ad AC.

Quoniam enim angulus D æqualis eſt angulo A: erunt, per vigeſimamoctauam Primi, AC & DE paralleli. Protraho CB ad punctum F: & pono EF æqualem CB: Itidem protraho ED ad punctum G: & pono EG æqualem CA: & connecto FG. Et quia angulus GEF æqualis eſt angulo C: & duo latera EF & EG, ſunt æqualia duobus CB & CA: erit Triangulum GEF, Triangulo ABC æquale & æquilaterum, per quartam Primi: & per vigeſimamoctauam eiuſdem, FG ipſi BA parallelus. Sic itaque argumentationem inſtituemus. Quoniam DE ipſi AC eſt parallelus: erit, per ſecundam huius, AD ad DB vt CE ad EB: Quapropter coniunctim, per decimamoctauam Quinti, vt AB ad DB, ſic CB ad EB. Simili ratione, quia BD ipſi FG eſt parallelus: erit, per ſecundam huius, FB ad BE vt GD ad DE: Ergo coniunctim, FE (ac propterea, BC) ad BE, ſicut GE (ac propterea, ſicut AC) ad DE. At probatum eſt vt AB ad DB, ſic CB ad EB. Quare, per vndecimam Quinti, vt AB ad DB & CB ad EB, ita AC ad DE, Quod erat demonſtrandum. Atque ea eſt altera Triangulorum Æquiangulorum compoſitio.



Tertia verò eſt ad decuſſationem inter duas parallelos: qualia ſunt in ſubiecta Figura Gnomonica, duo Triangula ABC & BDE: quorum duæ baſes AC & DE ſunt paralleli: atque inter has, duæ lineæ AE & CD, ſe decuſſantes in puncto B, ac duo ipſa Triangula ABC & BDE cum ipſis parallelis, conſtituentes. Figuram autem Gnomonicam compleuimus, vt fœcunditatem ipſius vbique obuiam oſtenderemus. Habes enim vno intuitu triplicem poſitionem Triangulorum Æquiangulorum. Scilicet in dimidio Parallelogrammo, duorum Triangulorum ABC & BEG, ſuper AE Dimetiente: ac tantundem in altera medietate Parallelogrammi. Quæ poſitio ad primam demonſtrationem pertinet. Alteram duorum Triangulorum AEK & BEG, etiam æquiangulorum: quorum minus intra maius inſitum eſt: ſicut & BED in AEH. Quod in ſecunda formula exhibuimus.



Tertiam habes poſitionē duorum ABC & BDE, itidemq́; ABF & BEG. Quorum probatio ſatis manifeſta eſt, ex ijs quæ iam antè tradidimus.

ATQVE hîc etiam ſi diligenter animaduerteris, comperies ex Triangulorum probatione, Parallelogrammorum probationem conſequi: quum conſtiterit ſicut AC ad CB, ita BG ad GE. Sed hæc iam pluribus verbis non indigent.

Quarta erat Triangulorum Æquiangulorū poſitio circa eandem Dimetientem: qualia ſunt ABC & ABF: item BEG & BED. Quæ quia ſunt æqualia, demonſtrationem non requirunt, ſed ad aliorum probationem accommodantur.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Triangula proportionalium laterum, æquales habent angulos ſub quibus latera proportionalia ſubtenduntur.

Hæc

Hæc eſt Conuerſa antecedentis. Sint duo Triangula ABC & DEF: ſitq́; AB ad DE, & AC ad DF, vt BC ad EF. Dico angulum A eſſe æqualem angulo D: & angulum B, angulo E: & angulum C, angulo F.

Super lineam EF, ex aduerſa parte Trianguli DEF, conſtituam, per vigeſimam-tertiam Primi, angulum FEG æqualem angulo B: & angulum EFG æqualem angulo C. Eruntq́; duo conſtituti, minores duobus rectis, quia æquales minoribus duobus rectis, per decimamſeptimam Primi. Concurrent igitur EG & FG, vt ad punctum G. Eritq́; angulus G, per trigeſimamſecundam Primi, æqualis angulo A. Itaque, per antecedentem, AB ad EG & AC ad FG, vt BC ad EF: ob idq́;, AB ad DE ſicut ad EG: & AC ad DF ſicut ad FG, per vndecimam Quinti. Igitur, per alteram partem nonæ eiuſdem, erit DE æqualis EG: & DF æqualis FG. Quapropter, ex octaua Primi, duo Triangula DEF & GEF ſunt æquiangula. Quum igitur Triangulum GEF ſit æquiangulum Triangulo ABC: erit & DEF eidem ABC æquiangulum, Quod erat demonſtrandum.

SED & hæc probatio ex Figura Gnomonica elicitur. Sint enim duo Triangula ABC & DBE: ſitq́; AB ad AC, vt BD ad BE: & AB ad BC, vt BD ad ED. Dico angulos proportionalibus lateribus contentos, eſſe æquales.

Ponam latus AB vnius, in directum lateris BD alterius: vt ſint ABC & BDE Triangula, ſuper lineam vnam AD. Et ducam DF parallelum ipſi CA, quæ concurrat cum CB protracto ad punctum F. Quia ergo, per decimamquintã Primi, angulus DBF æqualis eſt angulo ABC: & per vigeſimamnonam eiuſdem, angulus BDF, angulo BAC: erunt per trigeſimamſecundam eiuſdem, duo Triangula ABC & BFD, æquiangula. Itaque, per antecedentem, vt AB ad AC, ſic BD ad DF. Sed vt AB ad AC, ſic poſitum eſt BD ad BE. Eſt igitur, per nonam Quinti, DF ipſi EB æqualis. Rurſus per antecedentem, vt AB ad BC, ſic BD ad BF. Sed vt AB ad BC, ſic BD ad DE. Sunt igitur, per eandem Quinti, BF & ED latera æqualia. Itaque, per octauam Primi, duo BDF & BED Triangula ſunt æquiangula. Quare ABC & BDE æquiangula, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Duo Triangula, vnum angulum vni angulo æqualem habentia, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: inter ſe ſunt æquiangula.

Sint duo Triangula ABC & DEF: ſitq́; angulus B æqualis angulo E: & AB ad DE vt BC ad EF. Dico duo Triangula eſſe æquiangula.

Maneat vt in priori figuratione antecedentis, Triangulum EGF ex aduerſo Trianguli DEF, æquiangulum ipſi ABC. Et erit, per quartam huius, AB ad EG vt BC ad EF: ob idque, ex ipſa hypotheſi & vndecima Quinti, AB ad DE vt AB ad EG. Itaque, per ſecundam partem nonæ Quinti, DE eſt æqualis EG. Quia ergo duo latera DE & EF, Trianguli DEF, ſunt æqualia duobus EG & EF, Trianguli EGF: & angulus E vnius, æqualis angulo E alterius, quum vterq; ſit æqualis angulo B: erunt per quartam Primi, DEF & GEF æquiangula. Quum igitur EGF ſit ipſi ABC æquiangulum: erit & DEF eidem ABC æquiangulum, Quod erat demonſtrandum. Sed & idem ex Figura Gnomonica probabitur.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Si duo Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & quæ circa duos ex reliquis angulis latera, proportionalia: reliquorum verò duorum vterque aut neuter fuerit recto minor: æquiangula erunt Triangula, & anguli proportionalibus lateribus contenti, æquales.

Sint duo Triangula ABC & DEF: sitq; angulus A æqualis angulo D, & ratio AC ad DF vt CB ad FE: & vterque duorum angulorum B & E, aut neuter sit minor recto. Dico Triangula esse æquiangula, & angulos proportionalibus lateribus contentos esse æquales.

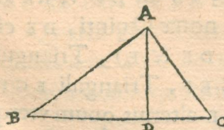
Iam enim si angulus C fuerit æqualis angulo F, constat ipsa esse æquiangula, ex antecedente. Si verò inæquales fuerint, sit maior C: & ponatur angulus ACG æqualis angulo F, per vigesimamtertiam Primi. Eritq;, per trigesimamsecundam eiusdem, Triangulum AGC, Triangulo DEF æquiangulum. Itaque, per quartam huius, AC ad DF vt GC ad EF. Sed sic fuit BC ad EF. Igitur, per nonam Quinti GC & BC sunt æquales: ob idq;, per quintam Primi, angulus B, æqualis angulo BGC. Si ergo neuter duorum B & E fuerit minor recto, erunt duo anguli B & G, Trianguli BGC, non minores duobus rectis, repugnante decimaseptima Primi. Sin vterque fuerit minor recto, erit angulus AGC maior recto, per decimamtertiam eiusdem, ac propterea angulus E maior recto, contra hypothesin. Non ergo inæqualis est angulus ACB ipsi F angulo. Quare ABC Triangulum, ipsi DEF Triangulo æquiangulum, & anguli proportionalibus lateribus comprehensi æquales, Quod erat demonstrandum.

PONITVR autem vterque C & E, aut neuter minor recto: vt deducamus ad absurdum. Scilicet quum reperiantur duæ lineæ GC & BC æquales, erunt duo anguli B & CGB æquales, per quintam Primi. Si ergo vterque E & B sit minor recto, erit & AGC minor recto, vtpotè ipsi E æqualis. Quare, per decimamtertiam Primi, erit CGB maior recto: ergo & B maior eodem: qui positus fuerat minor. Si verò neuter B & E sit minor recto, erit vterque, minimùm, rectus: Quapropter & CGB rectus, per quintam Primi: repugnante decimaseptima eiusdem.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Ab angulo recto Trianguli perpendicularis ad basin demissa, Triangulum in duo Triangula secat, similia toti & inter se.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A rectus: sitq; AD perpendicularis ad BC basin. Dico duo Triangula ABD & ADC, toti ABC Triangulo & inter se esse similia.



Nam quum vtrunque sit rectangulum, & vterque habeat vnum angulorum toti Triangulo communem: erunt per trigesimamsecundam Primi, toti æquiangula: quapropter & inter se. Scilicet, angulus B æqualis angulo CAD: & angulus C, angulo BAD: & duo anguli qui ad D, recti sicut & angulus BAC. Quod & nos suprà ad quadragesimamseptimam Primi demonstrauimus. Itaque, per quartam huius, latera æquos angulos continentia, proportionalia. Quare Triangula, toti & inter se similia, Quod fuit ostendendum.

Consect

Consectarium.

Perpendicularis à recto angulo Trianguli ad basin deducta, inter duo basis segmenta proportionalis est: Et vtrunuis laterum inter basin & segmentum sibi conterminum, proportionale.

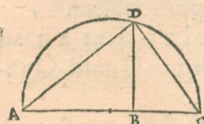
Vt AD perpendicularis, media proportionalis est inter BD & DC segmenta. Et AB latus, inter BC basin & BD segmentum: itidem AC latus, inter ipsam BC basin & DC segmentum, proportionale est.

PROBLEMA 1, PROPOSITIO IX.

Theoni 13.

Inter duas lineas rectas, mediã proportionalem inuenire.

Sint duæ lineæ rectæ AB & BC, inter quas sit inuenienda media proportionalis.

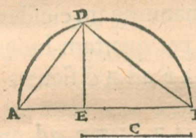


Ponam BC in continuum ipsius AB: vt sit AC linea vna. Super quam describam Semicirculum ADC. Et à puncto B, erigam BD perpendicularem. Hanc dico esse mediam inter AB & BC.

Connectantur DA & DC. Et erit, per trigesimamtertij, angulus ADC rectus. Quare, per Consectarium antecedentis, AB ad BD vt BD ad BC, Quod erat faciendum.

ALITER. Sint duæ lineæ AB & C, quarum maior AB (Nam inter æquales, media est æqualis). Volo inter ipsas constituere proportionalem.

Super AB describo Semicirculum ADB: & pono EB æqualem ipsi C. Tum ab E puncto, excito perpendicularem ED: Et connecto AD & BD. Dico BD esse mediam proportionalem inter AB & EB: hoc est, inter AB & C.



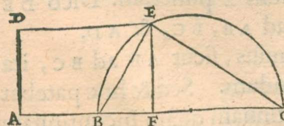
Constat quippè ex trigesima Tertij, angulum ADB esse rectum: & ex antecedente, duo Triangula AED & BED esse inter se & toti ADB similia. Quare per quartam huius, AB ad BD vt BD ad EB: ob idq;, vt BD ad C, Quod erat faciendum.

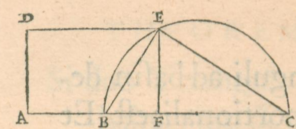
IN HAC igitur constructione, vno intuitu triplex conspicitur proportionalitas. Est enim BD media inter AB & EB, vt iam probauimus: sed & AD media inter AB & AE: Ac tertiò ED media inter AE & EB segmenta.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem datum Medium dimidia parte datæ lineæ non esse maius.

Sit datum Medium AB, data vero linea BC. Volo in BC duo extrema proportionalia reperire, inter quæ sit AB medium proportionale. Modò tamen AB non sit maius dimidia parte ipsius BC. Nam sic medium esse non posset.

Iungo AB & BC, vt AC sit linea vna. Tum super BC describo Semicirculum BEC. Et à puncto A, erigo perpendicularẽ AD: quam pono ipsi AB æqualem. Et per punctum D duco DE, parallelum ipsi AC: quæ omninò secabit, aut continget Semicirculum, vt in puncto E: quum AD non sit maior Semidiametro. Tum à puncto E, demitto EF perpendicularem ipsi BC. Dico BC sic diuisam in puncto F, vt AB sit media proportionalis inter BF & FC.





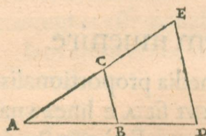
Hoc autem ſatis manifeſtum eſt ex ipſa trigeſima Tertij & Conſectario antecedentis. Nam quum FE ſit ęqualis AD, per trigeſimamquartam Primi: ob idq́;, ipſi AB: ductis lineis BE & CE, fiet Triangulum BEC Rectangulum. Ob id, ex ipſo Conſectario, erit BF ad FE (ob idq́;, ad ipſam AB) vt FE ad FC, Quod fuit faciendum.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO X.

Theoni 11.

Duabus lineis propoſitis tertiam continuè proportionalem adiungere.

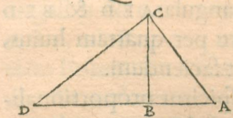
Sint duæ lineæ AB & AC, quibus ſit addenda tertia continuè proportionalis.



Coniungo ipſas AC & AB ad angulum arbitrarium BAC: Tum protracta AB, facio BD æqualem ipſi AC. Et connexa BC, duco DE, pararallelum ipſi BC: & protraho AC: donec concurrat cum DE ad E punctum. Dico lineam CE eſſe tertiam ad duas AB & AC continuè proportionalem.

Eſt enim, per ſecundam huius, AB ad BD ſicut AC ad CE: Sed AB ad BD ſicut AB ad AC, per alteram partem ſeptimæ Quinti. Quare AB ad AC ſicut AC ad CE, Quod erat faciendum.

ALITER. Conſtituo AB & BC datas, in directum. Tum ſuper punctum A erigo AD lineam, ad angulum arbitrarium: quam facio æqualem ipſi BC. Et à puncto D, per punctum B, duco tranſuerſam DE: ad quam demitto concurrentem CE, parallelum ipſi AD. Dico CE eſſe tertiam proportionalem ad AB & BC. Quum enim, per decimamquintam Primi, angulus B, Trianguli ABD, ſit æqualis angulo B, Trianguli CBE: & per vigeſimamnonam eiuſdem angulus A æqualis angulo C, & angulus D angulo E: erit, per quartam huius, AB ad DA ſicut DC ad CE. Quare, per vndecimam Quinti, AB ad BC ſicut BC ad CE, Quod erat faciendum.



ALITER rurſus. Conſtituo ipſas AB & BC ad angulum rectum ABC. Et connexa AC, duco à puncto C, perpendicularem CD: quam produco donec concurrat cum AB protracta, ad punctum D. Dico BD eſſe tertiam proportionalem ad AB & BC. Id verò ſatis conſtat ex Conſectario octauæ huius.

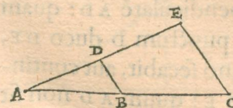
PROBLEMA 3, PROPOSITIO XI.

Theoni Problema 4, Propoſitio 12.

Tribus lineis propoſitis quartam proportionalem adiungere.

Sint tres lineę AB, BC, & AD. Volo his tribus quartā proportionalem adiungere.

Ex AB & BC facio lineam vnam AC: & ſtatuo AD cum AC, ad angulum fortuitum CAD: & connecto DB: cui duco parallelum CE. Tum protraho AD donec concurrat cum CE ad ipſum E punctum. Dico DE eſſe quartam proportionalem ad AB, BC, & AD.



Erit enim, per ſecundam huius, ſicut AB ad BC, ita AD ad DE, Quod erat faciendum. Sed & hoc patebat ex antecedente: Modò tamen animaduertas tam Continuam quàm Incontinuam proportionalitatem hîc probari: quas Euclides ſeparatim non tractat: vt in Definitionibus Quinti monuimus.

ALITER. Sint tres lineæ AB, BC, & BD. Volo ad ipsas addere quartam proportionalem.

Coniungo AB primam cum BD tertia: vt sit AD linea vna. Ac super hanc erigo BC secundam, ad angulum fortuitum ABC: Et connecto AC. Tum per punctum D duco DE ipsi AC parallelum: quam produco donec concurrat cum CB itidem protracta ad punctum E. Dico BE esse quartam proportionalem ad ipsas AB, BC, & BD: esse scilicet vt AB ad BC, ita BD ad BE.

Quum enim ex decimaquinta & vigesimanona Primi, duo Triangula ABC & DBE sint æquiangula: erit, per quartam huius, AB ad BC vt BD ad BE, Quod erat faciendum.

Hanc Campanus antecedenti Propositioni annexuit, vt Appendicem.

PROBLEMA 4, PROPOSITIO XII.

Theoni Problema 1, Propositio 9.

A data linea constitutam partem abscindere.

Sit data linea AB, à qua sit rescecanda, verbi gratia, pars tertia.

Duco lineam AC, quæ cum AB faciat angulum fortuitum CAB. Et in directum AC, continuo CD & DE, ipsi AC æquales: vt sit AE in tres æquales partes diuisa, in punctis C & D. Et connecto EB. Tum à puncto C duco CF parallelum ipsi BE, secantem AB in puncto F. Dico AF esse tertiam partem lineæ AB.

Quoniam enim, per secundam huius, EC ad CA vt BF ad FA: erit coniunctim, EA ad CA vt BA ad FA. Sed AE ad CA tripla: igitur & BA ad FA tripla. Quare AF ipsius AB tertia pars, Quod erat faciendum.

SED quoniam minutæ denominationes, quales sunt superpartientes & Superparticulares, non ita sunt expeditæ: id negotij obiter explicabimus.

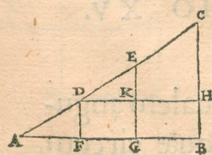
Sit linea AB, à qua rescecanda sit pars subsupertripartiens quintas.

Quum Octonarius ad Quinarium sit supertripartiens quintas: ex octo lineolis æqualibus, faciam lineam vnam: cuiusmodi hoc loco est linea AC: quam coniungam ad angulum fortuitum cum ipsa AB diuidenda. Et connexa BC, per punctum quintæ sectionis, quod sit D, ducam DE parallelum ipsi BC. Eritq; AE ipsa pars quam quærimus lineæ AB, scilicet subsupertripartiens quintas. Quod delineatio ipsa satis ostendit. Nam quum AD sit ad AC subsupertripartiens quintas: sitq; ex postrema probatione, vt AD ad AC, sic AE ad AB: erit & AE ad AB subsupertripartiens quintas, Quod fuit ostendendum.

PROBLEMA 5, PROPOSITIO XIII.

Theoni Problema 2, Propositio 10.

Datam lineã non sectam, datæ lineæ sectæ similiter secare.



Sit data linea non secta, AB: secta verò sit AC, verbi gratia, in tres partes quantascunque, AD, DE, & EC. Volo lineam AB in tot similes partes diuidere.

Iungo AB & AC ad angulum pro arbitrio, BAC. Et connecto BC: Cui per puncta D & E duco parallelos DF

& E G. Has dico diuidere lineam A B in partes ſimiles partibus lineæ A C.

Ducam D H parallelum ipſi A B, ſecantem B C in puncto H: & G E in puncto K. Et ſumptis duobus Triangulis A B C & D H C, erit per ſecundam huius, E D ad D A vt G F ad F A: ſimiliter C E ad E D vt H K ad K D: ob idq́; , vt B G ad G F, per trigeſimamquartam Primi, & ſecundam partem ſeptimæ Quinti, Quod erat faciendum. Toties verò repetitur ſecunda huius, quot erunt paralleli ipſi B C: ſed toties trigeſimaquarta Primi & ſeptima Quinti, quot erunt ipſi A B paralleli.

E X H A C habetur facilis ratio diuidendæ lineæ in quaſcunque partes nominatas. Vt ſi tripartitò ſecanda ſit: fiet D E æqualis A D: & E C æqualis eidem, per tertiam Primi. Ac tum eodem constructionis modo quo iam vſi ſumus, ſecabitur A B in tres partes æquales.

Idem de cuiuſcunque generis partibus erit iudicium.

THEOREMA 8, PROPOSITIO XIIII.

Campano 13.

Aequalium Parallelogrammorum, & vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca ſunt latera quæ circum æquales ſunt angulos: Et quorum Parallelogrammorum vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos, ea ſunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma A B C D & C E F G, æqualia: ſitq́; angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Dico eſſe B C ad C G vt E C ad C D. Et ſi fuerit B C ad C G vt E C ad C D, fuerintq́; ij duo comprehenſi anguli æquales: Dico duo Parallelogramma eſſe æqualia.

Ponam duo latera B C & C G in directum, vt ſit B G linea vna. Eritq́; E D itidem linea vna, per ea quæ demonſtrauimus ad decimamquintam Primi. Produco itaque A D & F G latera donec concurrant ad punctum H. Et erit, per priorem partem ſeptimæ Quinti, vtriuſque Parallelogrammi A C & C F ad Parallelogrammum C H, ratio eadem. Et quia per primam huius, Parallelogrammum A C ad Parallelogrammum C H eſt vt B C baſis ad C G baſin: & Parallelogrammum C F ad idem C H, vt E C baſis ad C D baſin: erit, per vndecimam Quinti, B C ad C G vt E C ad C D, Quod eſt prius.

Eſto iam B C ad C G vt E C ad C D. Et erit, per primam huius, B C baſis ad C G baſin, vt A C Parallelogrammum ad C H Parallelogrammum: Et E C baſis ad C D baſin, vt C F Parallelogrammum ad idem C H Parallelogrammum. Itaque, per vndecimam Quinti, A C ad C H vt C F ad idem C H. Quare, per priorem partem nonæ eiuſdem, Parallelogrammum A C, Parallelogrammo C F eſt æquale, Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XV.

Campano 14.

Aequalium Triangulorum, & vnum vni ęqualem angulum habentium, reciproca ſunt latera quæ circum

æquales

æquales angulos: Et quorum Triangulorum vnum vni æqualem angulum habentium reciproca ſunt latera quæ circum ęquales ſunt angulos, ea ſunt ęqualia.

Sint duo Triangula æqualia ABC & BDE: ſitq; angulus B vnius, æqualis angulo B alterius. Dico AB ad BE eſſe vt DB ad BC: Et ſi fuerit AB ad BE vt DB ad BC, fuerintq; duo anguli qui ad E, æquales, Triangula eſſe æqualia.

Iungam duo latera AB & BE, vt ſit AE linea vna. Et erit DC linea vna, eadem ratione qua in antecedente: ſcilicet, per Conuerſam Decimæquintæ Primi. Et connectam CE. Eritq;, per priorem partem ſeptimæ Quinti, vtriuſque Trianguli ABC & BDE, ad Triãgulum CBE ratio eadem, & quia, per primam huius, eſt ABC ad BEC vt AB ad BE: & BDE ad idem BEC vt DB ad BC: erit, per vndecimam Quinti AB ad BE vt DB ad BC, Quod eſt prius.

Eſto iam AB ad BE vt DB ad BC, ſintq; duo anguli qui ad B, æquales. Et erit, per primam huius, AB ad BE vt ABC ad BEC: & DB ad BE vt DEB ad idem BEC. Eſt igitur, per vndecimam Quinti, vtriuſque ABC & DEB ad BEC, ratio eadem. Quare, per priorem partem nonæ eiuſdem, ipſa ABC & DEB ſunt æqualia, Quod fuit demonſtrandum.

HÆC figuratio, ſi intelligatur connexa AD, erit Quadrilatera cum duabus Dimetientibus. Sed non oportuit eſſe æquidiſtantium laterum, quum de ſolis Triangulis ageretur: neque ijs æquiangulis. Nam ſic eſſent AC & DE paralleli.

Cæterùm hæc mutuorum laterum in Triangulis comparatio, ſic colligitur: vt ſit AB ſuperior, ad ſuam directam BE, ſicut DB itidem ſuperior, ad ſuam directam BC. Nam ſi diceretur AB ſuperior, ad BE, vt CB inferior, ad BD: non reſponderent ſingula ſingulis: neque eſſet mutua comparatio. Idem intelligo de permutatione aut conuerſione.

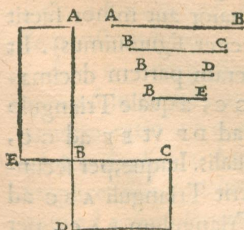
Atque hoc notabile eſt ad reciprocationis cognitionem. Hoc igitur totum ex duabus Dimetientibus Quadrilateri ſe decuſſantibus pendet.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XVI.

Campano 15.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis continetur Rectangulum, æquale eſt ei quod ſub mediis: Et ſi ſub extremis comprehenſum Rectangulum æquale fuerit ei quod ſub mediis, quatuor lineæ proportionales erunt.

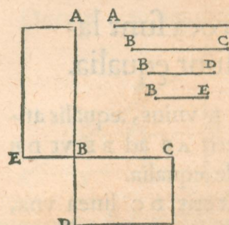
Sint quatuor lineæ AB, BC, BD, & BE proportionales, vt AB ad BC, ita BD ad BE. Dico Rectangulum comprehenſum ſub AB & BE, eſſe æquale Rectangulo comprehenſo ſub BC & BD: & ſi Rectangulum comprehenſum ſub AB & EB, ſit æquale Rectangulo quod ſub BC & BD: dico & eſſe AB ad BC vt BD ad BE.



Fiat Rectangulum AE ex AB & BE: Rectangulum quoque CD, ex BC & BD. Et ſtatuantur ad angulos contra ſe poſitos, qui ad B: vt clarius ſit, totum ex Figura Gnomonica pendere.

Quum itaque ſit AB ad BC vt BD ad BE: erit permutatim, AB ad BD vt BC ad

ad BE. Quapropter, in quocunque sint situ Rectangula, quum sint anguli vndiquaque æquales, erunt latera reciprocè proportionalia. Quare, per secundam partem decimæquartæ huius, Parallelogramma æqualia, Quod est prius.

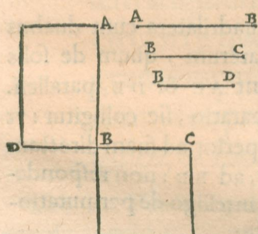


Secundum patet ex priori parte eiusdem. Si enim sint Parallelogramma æqualia: quum omnes anguli sint æquales, latera erunt reciproca. Quare in hoc situ AD lineæ vnius, erit AB ad BD vt BC ad BE: hoc est, permutatim, AB ad BC vt BD ad BE, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XVII.

Campano 16.

Si tres lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis continetur Rectangulum, æquale est ei quod à media fit Quadrato: Et si sub extremis comprehensum Rectangulum, æquale fuerit ei quod à media fit Quadrato: ipsæ tres lineæ proportionales erunt.



Sit linea AB ad lineam BC, vt eadem BC ad tertiam BD. Dico Rectangulum comprehensum sub AB & BD esse æquale Quadrato quod ex BC. Et si Rectangulum comprehensum sub AB & BD sit æquale Quadrato BC: esse AB ad BC vt BC ad BD.

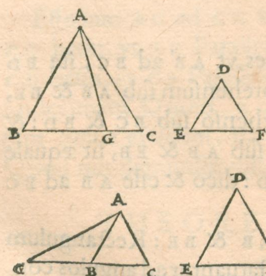
Hoc autem satis manifestum est ex antecedente. Nam linea BC, hoc loco est pro secunda & tertia: BD autem quarta. Hoc igitur Theorema superiori connecti poterat, vt Consectarium.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Similia Triangula duplã inter se habent rationem, quàm similis rationis latera.

Sint duo Triangula, ABC & DEF, similia: hoc est, per primam Definitionem huius, æquiangula, & laterum proportionalium: Et sit angulus A æqualis angulo D: angulus B, angulo E: & angulus C, angulo F: sitq; AB ad DE & AC ad DF vt BC ad EF. Dico duplam esse rationem Trianguli ABC ad Triangulum DEF, quàm BC ad EF.



Duabus enim lineis BC & EF addo tertiam CG, per decimam huius, continuè proportionalem: resecta BC, aut eadem protracta, vt maior aut minor fuerit quàm EF (cuiusmodi hîc dupliciter figurauimus). Et connecto GA. Eritq;, per alteram partem decimæquintæ huius, Triangulum AGC, æquale Triangulo DEF: quum sit AC positum ad DF vt EF ad GC, & sit angulus C, angulo F æqualis. Itaque, per secundam partem septimæ Quinti, erit Trianguli ABC ad vtrunque ipsorum AGC & DEF, ratio eadem. Atqui Triangulum BAC, per primam huius, ad Triangulum AGC, est vt BC ad GC: sed BC ad GC ratio, est vt BC ad EF duplicata, per decimam Definitionem Quinti. Quare Trianguli

ABC

ABC ad Triangulum DEF ratio, est vt BC ad DF duplicata, Quod erat demonstrandum.

Iam verò si CG sit æqualis BC, erit, per alteram partem decimæquintæ huius, Triangulum ABC æquale Triangulo DEF. Æqualis autem proportio, quocunque modo multiplicetur, manet eadem: quum ab vnitate denominationem sumat, quæ ipsa sui est Quadrum, Cubus: ac in vniuersum in se ducta, semper sibi æqualis.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIX.

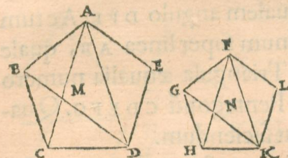
Theoni 20, Campano 18.

Similia Polygona, in similia totidemq; numero Triangula diuiduntur. Et Polygonum ad simile Polygonum duplam habet rationem, quàm latus ad similis rationis latus.

Sint Polygona similia, ac in præsens Pentagona, ABCDE & FGHKL. Hæc dico diuidi in Triangula inter se similia, & numero æqualia: Atque insuper, esse vtrunque illorum ad alterum, vt proportio lateris AB ad FG latus simile duplicata.

Connectantur AC & AD: itidem FH & FK. Eritq;, propter similitudinem Polygonorum & per sextam huius, Triangulum ABC, Triangulo FGH æquiangulum: & Triangulum AED, Triangulo FLK. Ob id, quum Pentagona sint ex positu, æquiangula & laterũ proportionalium: erit & Triangulum ACD, Triangulo FHK æquiangulum. Sicq; vtrunque alteri simile, per quartam huius & definitionem Similium Superficierum. Quare quum æqualia sint numero, patet prior pars.

Altera autem sic. Ducatur BD, quæ secet AC in puncto M: & GK, quæ secet FH in puncto N. Eritq;, propter similitudinem Polygonorum & per sextam huius, Triãgulum BCD, Triangulo GHK æquiangulũ: vnde & Triangulum ABM Triangulo FGN æquiangulum: Æquales enim sunt anguli BAM & GFN, & ab æqualibus auferuntur ABM & FGN: ob id, per trigesimamsecundam Primi, æquiangula. Eadem ratione AMD ipsi FNK æquiangulum: Quapropter ex quarta huius, BM ad GN vt AM ad FN: itidem AM ad FN vt MD ad NK. Igitur, per vndecimam Quinti, BM ad GN vt MD ad NK: & permutatim, BM ad MD vt GN ad NK. Sed, per primam huius, ABM ad AMD, & BCM ad CMD, vt BM ad MD: &, per eandem, FGN ad FNK, & GNH ad HNK, vt GN ad NK. Itaque ex decimatertia Quinti, ABC ad ACD vt FGH ad FHK: & permutatim, ABC ad FGH vt ACD ad FHK. Eadem ratione si intellexerimus ductas EC & LH, probabitur sic esse ACD ad FLK. Quare per decimamtertiam Quinti, erit totius Pentagoni ratio ad totum Pentagonum, vt ABC ad FGH: ob idq;, per antecedentem, vt AB ad FG duplicata, Quod erat demonstrandum.



SED hoc posterius caput in communi notione est. Nam quum Triangula in quæ resoluuntur Pentagona, sint æqualia numero, & inter se similia: erit per antecedentem, ratio ABC ad FGH vt BC ad GH duplicata: & AED ad FLK vt DE ad KL duplicata. Atqui eæ omnes duplicatæ rationes sunt æquales, quum earum simplices sint æquales, erit igitur, per decimamtertiam Quinti, ratio totius Pentagoni ad totum Pentagonum, vt vnius laterum ad suum simile, duplicata, Quod erat probandum.

Consect

Consectarium.

Si igitur tres lineæ proportionales fuerint: quanta est prima ad tertiam, tanta erit Superficies quæ super primam, ad Superficiem quæ super secundam: quum vtraque fuerit similis & similiter descripta.

Quod ex iam ascripta deductione manifestum euadit.

HVIC etiam Theoremati quidam aliud subijciunt Consectarium de Parallelogrammis Similibus, quòd in dupla sint ratione, quàm ipsorum latera similiter sumpta: Sed hoc patet vel ex Triangulorum similitudine. Triangula enim, vt iam non semel monuimus, dimidia sunt Quadrilaterorum. Immò & Theorema si de Rectilineis pronuntiasset, vniuersam peræquè habuisset probationem, atque de Polygonis.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XX.

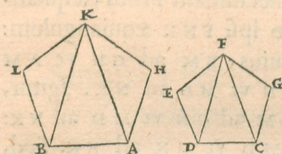
Theoni 19, Campano 18.

Super data linea, datæ Superficiei rectilineæ similem Superficiem similiterq́; positam describere.

Sit data linea AB, data verò Superficies in præsens Pentagona, CDEFG. Volo super AB constituere Superficiem ipsi CDEFG similem & similiter positam.

Resoluo datam Superficiem in Triangula, ductis lineis DF & DG. Tum super puncto A, constituo angulum BAH, æqualem angulo C. Itidem super puncto B, constituo angulum ABH, æqualem angulo CDG: ducta BH, quæ concurrat cum AH ad punctum H.

Et erit, per trigesimamsecundam Primi, angulus AHB æqualis angulo CDG: ob id, per quartam huius, latera duorum Triangulorum GCD & HAB, proportionalia. Pono etiam angulum HBK, æqualem angulo GDF: & angulum BHK, angulo DGF: angulum verò KBL, angulo FDE: ac demùm angulum BKL, æqualem angulo DFE. Actum erit completum Pentagonum super linea AB, quale quærimus. Est enim in Triangula æqualia numero & æquiangula diuisum, vt Pentagonũ CDEFG. Quare eidem simile, Quod erat faciendum.



VT autem hoc loco obiter explicemus quid similiter positum dicatur in Superficiebus: id est, si occurrat Superficies, cuiusmodi est hoc loco, Pentagonum CDEFG, cui super linea AB sit constituenda Superficies similis & similiter descripta, vt attendamus an ipsa AB comparetur lateri DC an lateri DE, an breuiter cuipiam laterum Figuræ oblatæ: eamq́ue lineam comparationi accommodemus. Posset enim fieri angulus BAH æqualis angulo CDE, atque eo instituto perfici Figura: quæ vt similis euaderet, non tamen similiter esset descripta. Quod satis manifestum est, quum Figura quæ proponitur, non est æqualium laterum.

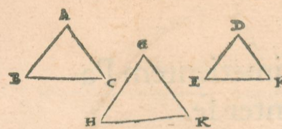
THEOREMA 15, PROPOSITIO XXI.

Campano 20.

Quæ eidem Rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

Sint duo Rectilinea ABC & DEF: sitq́; vtrunq; illorum simile Triangulo GHK: vt sit

vt ſit AB ad AC, & DE ad DF, ſicut BC & EF ad HK: & anguli vtriuſque proportionalibus lateribus contenti, æquales ſint angulis Trianguli GHK. Dico ambo eſſe ſimilia.



Nam, per vndecimam Quinti, erit AB ad AC & DE ad DF vt BC ad EF: ob idq́; , per quintam huius, erunt anguli ſub quibus latera proportionalia ſubtenduntur, æquales. Ambo igitur æquiangula: Quare, à definitione Similium Superficierum, inter ſe ſimilia, Quod fuit demonſtrandum.

Hoc Theorema per ſe fuit manifeſtum, velut animi Notio. Nam, vt anteà docuimus, Similitudo Superficierum eſt æqualitas quædam.

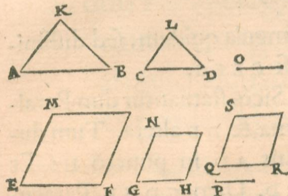
THEOREMA 16, PROPOSITIO XXII.

Theoni 21.

Si quatuor lineæ fuerint proportionales: erunt & ab eis Rectilinea ſimilia ſimiliterq́; poſita, proportionalia: Et ſi ab eis Rectilinea ſimilia ſimiliterq́; poſita, fuerint proportionalia: erunt & ipſæ proportionales.

Sint quatuor lineæ proportionales, AB, CD, EF & GH: vt AB ad CD, ſic EF ad GH: ſintq́; ab ipſis AB & CD, ſimilia ſimiliterq́; deſcripta Rectilinea, quæ ſint Triangula, ABK & CDL: Ab ipſis verò EF & GH, ſimilia ſimiliterq́; deſcripta, Parallelogramma MF & NH. Dico eſſe vt Triangulum ABK ad Triangulum CDL, ita Parallelogrammum MF ad Parallelogrammum NH.

Ponatur ad ipſas AB & CD, per decimam huius, tertia proportionalis O: ad ipſas quoque EF & GH, tertia proportionalis P. Et quoniam vt AB ad CD, ſic EF ad GH: ſed & vt CD ad O, ſic GH ad P: ex æquali igitur, per vigeſimamſecundam Quinti, vt AB ad O, ſic EF ad P. Sed vt AB ad O, ſic Triangulum ABK ad Triangulum CDL, per Conſectarium decimænonæ huius: Et per idem ipſum, vt EF ad P, ita Parallelogrammum MF ad Parallelogrammum NH. Vt igitur, per vndecimam Quinti, ABK Triangulum ad CDL Triangulum, ita MF Parallelogrammum ad NH Parallelogrammum, Quod eſt prius.



Sint verò duo Triangula ABK & CDL ſimilia & ſimiliter poſita: duoq́; Parallelogramma MF & NH, eiuſmodi. Dico eſſe AB ad CD vt EF ad GH.

Ponatur, per duodecimam huius, vt AB linea ad CD lineam, ita EF ad QR: & per vigeſimam huiuſce, deſcribatur ſuper QR, Parallelogrammum QRS, vtrique ipſorum MF & NH ſimile ſimiliterq́; poſitum. Et erit, per priorem partem huius, vt ABK Triangulum, ad CDL Triangulum, ſic MF Parallelogrammum, ad SR Parallelogrammum. Sed ſic fuit MF ad NH. Igitur per ſecundam partem nonæ Quinti, Parallelogrammum SR æquale eſt Parallelogrammo NH. Et quia ſunt ſimilia & ſimiliter poſita, æqualis erit linea GH, lineæ QR, per ſecundam partem decimænonæ huius. Nam quum ſit ratio NH Parallelogrammi ad SR Parallelogrammum, dupla quàm GH lineæ ad QR lineam, eaq́; æqualis: ipſa non niſi ex æquali produci poteſt. Quare vt AB ad CD, ita EF ad GH, Quod fuit demonſtrandum.

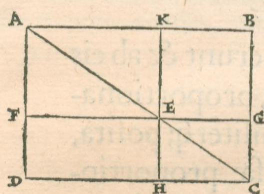
THEOREMA 17, PROPOSITIO XXIII.
Campano 22, Theoni 24.

In omni Parallelogrammo, quæ circa Dimetientem Parallelogramma, ſimilia ſunt toti, & inter ſe.

In Parallelogrammo A B C D, ſint duo Complementa G H & F K, circa Dimetientem A C. Hæc dico eſſe toti B D & inter ſe ſimilia.

Eſt enim, per ſecundam huius, B G ad G C, & D H ad H C, vt A E ad E C: ob id, coniunctim, B G ad C G & D C ad C H, vt A C ad C E. Quapropter, ex vndecima Quinti, B C ad C G vt D C ad C H, igitur & vt A B ad E G: quum A B ſit æqualis D C, & E G æqualis H C.

Eadem argumentatione erit A D ad E H, vt A B ad E G, & vt D C ad H C.



Quia ergo Parallelogramma ſunt æquiangula, erit per definitionem Similium Superficierum, G H ſimile toti B D. Haud diſſimili ratione probabitur F K eidem B D toti ſimile: quum ſit B A ad A K & D A ad A F, vt C A ad A E, per ſecundam huius & Coniunctam proportionalitatem. Quapropter ex vigeſima huius, erit & F K ſimile G H. Sicq; conſtat propoſitio.

SED & hoc conſtabat ex Triangulis: ex ijs ſcilicet quæ probauimus ad quartam huius. Quum enim duo Triangula A B C & E G C ſint æquiangula, & laterum ad æquos angulos proportionalium: erit A B ad B C vt E G ad E C. Rurſus quum A D C & E H C ſint ſimilia: erit A D ad D C vt E H ad H C. Quod & eodem argumento probabitur de duobus Triangulis A E F & A E K, ipſum F K Parallelogrammum complentibus. Sunt igitur F K & H G Parallelogramma, toti B D Parallelogrammo & inter ſe ſimilia, Quod erat demonſtrandum.

Ab hoc Theoremate non incommodè locum ſibi inueniet hoc Problema, quanuis idipſum iam antè proponi potuiſſet.

Propoſitis duobus Parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus, ab vno illorum, Parallelogrammum alteri ſimile reſecare.

Sint duo Parallelogramma A B C D & C E F G, æquiangula quidem, ſed diſſimilia. Volo ab ipſo A B C D reſecare portionem Similem ipſi C E F G.

Sit ergo angulus C vnius, æqualis angulo C alterius: Sicq; ſtatuantur duo Parallelogramma, vt B G ſit linea vna, & D E altera. Tum ducatur tranſuerſa F C H, ſecans A D in puncto H: Et ducatur H K parallelus ipſi C D. Dico C D H K Parallelogrammum, ex A C Parallelogrammo reſectum, eſſe ſimile ipſi E G Parallelogrammo.

Id verò ſatis conſtat ex hac vigeſimatertia: quum ambo ſint circa eandem Dimetientem. Atque ad clariorem notionem, perfeci A B G L Parallelogrammum. Hîc etiam ſibi locum inueniet hoc Problema,

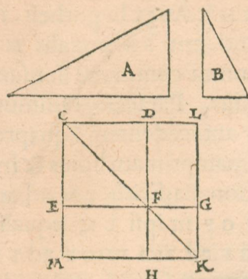
Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiē proportionalem inuenire.

Sint duæ Superficies rectilineæ A & B, inter quas ſit collocanda media Superficies proportionalis.

Reduco ipſas ad duo Parallelogramma Similia, ſecundùm doctrinam decimæoctauæ huius: (vel, ſi placet, vtranque ad Quadratum, ex vltima Secundi). Et ſint duo Parallelogramma C D E F & F G H K, ſimilia inter ſe, & duabus Superficiebus A & B mutuò ęqualia. Tum pono angulos qui ad F ſunt æquales, alterum ex aduerſo alt

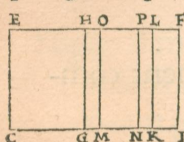
so alt

ſo alterius: vt ſint duo Parallelogramma E D & H G circa eandem Diametrum C K.



Et perficio Parallelogrammum C L K M. Dico alterutrum Supplementorum F L, & F M, eſſe medium proportionale inter C F & F K: hoc eſt, inter A & B: eſſe ſcilicet vt H G Superficies ad F L Superficiem, ſic eandem F L ad E D Superficiem. Eſt enim, ex hac vigeſimatertia Propoſitione, linea H F ad lineam F D, vt linea G F ad lineam F E: At, per primam huius, vt H F ad F D, ſic H G Superficies ad F L Superficiem: ſed & vt G F ad F E, ita F L Superficies ad E D Superficiē. Quare, per vndecimam Quinti, vt H G Superficies ad F L Superficiem, ſic eadem F L Superficies ad E D Superficiem, Quod fuit faciendum.

ALITER expeditiùs. Inter duas parallelos interminatas C D & E F, conſtituo Parallelogrammum C G E H, verbi gratia, Rectangulum: & inſuper, æquale Rectilineo A: per ea quæ docuimus ad quadrageſimamquartam Primi, ac eodem præcepto, inter ipſas parallelos conſtituo alterum Parallelogrammum K D L F, æquiangulum ipſi C H Parallelogrammo, & æquale ipſi B Rectilineo. Iam in linea



E F, inter ipſas C H & L D baſes, pono lineā M N media ratione proportionalem, per nonam huius. Ductiſq; M O & N P parallelis ipſis G H & D F, conſtituo Superficiem ęquidiſtantium laterum, M P. Hanc dico eſſe media ratione proportionalem inter duo C H & K F: ac propterea inter A & B Rectilinea.

Eſt enim, per primam huius, vt C G baſis ad M N baſin, ſic C H Parallelogrammum ad M P: Et per eandem, vt M N baſis ad K D baſin, ſic M P ad K F. Quare, per vndecimam Quinti, vt C H ad M P, ſic M P ad K F, Quod fuit probandum.

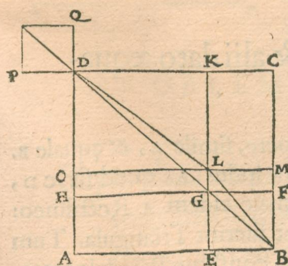
Sed nos priorem demonſtrationem aſtruximus, ad illuſtrandam vbique Figuram noſtram Gnomonicam.

THEOREMA 28, PROPOSITIO XXIIII.

Campano 23, Theoni 26.

Si duo Parallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita, communem angulum habuerint, aut angulum æqualem angulo æquali contrà poſitum habuerint: ambo circa eandem Dimetientem conſiſtunt.

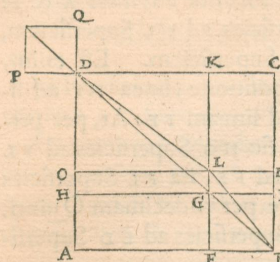
Sint duo Parallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita, A B C D & E B F G, communem habentia angulum qui ad B. Hæc dico eſſe circa vnam Dimetientem. Sint & duo Parallelogramma E F & H K ſimilia ſimiliterq; poſita: ſitq; angulus G vnius, æqualis angulo G alterius: & vterque alteri contra poſitus. Dico etiamnum duo E F & H K Parallelogramma circa vnam Dimetientem conſiſtere.



Prius ſic probatur. Connectam B G & G D: quæ ſi vnica linea fuerit, patet Propoſitio. Sin minus, ſit B L D Dimetiens: & ducatur M L O, parallelus ipſi E B, quæ ſecet B C & A D in punctis M & O.

Et erit, per antecedentem, Parallelogrammum E M ſimile toti A C: quapropter erit C B ad M B vt A B ad E B. At, ex hypotheſi, C B ad F B vt A B ad E B. Igitur, per vndecimam Quinti, C B ad F B vt C B ad M B. Quare, per ſecundam partem nonæ eiuſdem, F B æqualis M B, pars toti, Quod minimè conuenit.

Secundum ſic. Educta, vt modò, Dimetiente per L punctum, erit per antecedentem, MB ad EB vt KL ad LO (hoc eſt, vt KL ad GH). At ex hypotheſi, FB ad EB vt KG ad GH. Quare per ipſam vndecimam Quinti, erit FB æqualis MB: & prætereà KL ipſi KG: contra commune Senſum.



ALITER compendioſiùs. Parallelogrammum EM ſimile eſt toti AC, per antecedentem: quapropter & minori EF, per vigeſimamprimam huius & hypotheſin: ſicq; latera proportionalia: Eritq; LM ad MB vt GF ad FB. Quum igitur GF ſit ipſi LM æqualis: erit, per ſeptimam Quinti, GF ad MB vt GF ad FB. Quare FB ipſi MB ęqualis, pars toti, Quod eſt abſurdū.

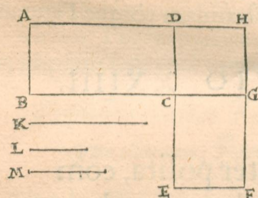
HVIVS Propoſitionis ſententiam ideò ampliaui, vt etiam de Parallelogrammis cõnexis intelligeretur: qualia in conſtructione apparent AC & PQ. Dimetiens enim infinitè produci poteſt, & Parallelogramma ſimilia circunſcribi. Breuiter, vt hæc omni ex parte Conuerſa eſſet antecedentis.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXV.

Theoni 23, Campano 24.

Aequiangula Parallelogramma, rationem habent compoſitam ex alternorum laterum ratione.

Sint duo Parallelogramma, ABCD & CEFG æquiangula, & ſit angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Dico rationem vnius ad alterum, compoſitam ex ratione quæ eſt BC ad CG, & quæ DC ad CE.



Ponam ambo Parallelogramma ex aduerſo, vt BG ſit linea vna, & DE itidem vna: & perficiam Parallelogrammum ABGH. Ponam inſuper vt ſit linea K ad lineam L, vt BC ad CG: & eadem L ad M lineam, vt DC ad CE, ex præcepto duodecimæ huius.

Eritq;, per primam huiuſce & vndecimam Quinti, BD Parallelogrammum ad CH Parallelogrammum, vt K ad L: & DG Parallelogrammum ad CF Parallelogrammum, vt L ad M. Ex æquali igitur erit BD ad CF vt K ad M. Atqui ratio K ad M, producitur ex K ad L & ex L ad M: vt patet ex quinta Definitione huius. Communi igitur iudicio, producetur ratio BD ad CF, ex ratione BC ad CG & DC ad CE, Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO XXVI.

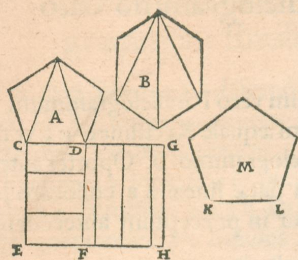
Theoni & Campano 25.

Dato Rectilineo, Rectilineum ſimile & alii dato æquale conſtituere.

Sint duo Rectilinea A & B. Volo Rectilineum conſtruere, ſimile A, & ęquale B.

Reſoluto vtroque in ſua Triangula, ſuper vno laterum ipſius A, quod ſit CD, conſtituo Parallelogrammum CDEF Rectangulum, æquale eidem A Rectilineo: per quadrageſimamquartam Primi toties repetitam, quot fuerint Triangula. Tum per eandem, ſuper linea DF, ad angulum datum ECD, conſtituo Parallelogrammum DFGH, æquale ipſi B Rectilineo. Eritq;, per vigeſimamnonam Primi, & quartamdecimam eiuſdem, tota CH vna Superficies æquidiſtantium laterum. Pono

poſtmod



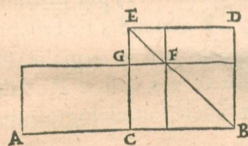
postmodùm, per nonam huius, lineam K L mediam proportionalem inter C D & D G lineas: Ac super K L, per decimamnonam huius, constituo ipsi A Rectilineo simile Rectilineum M. Quod dico esse æquale ipsi B Rectilineo. Nam quum C D, K L, & D G sint continuè proportionales: erit, per Consectarium decimænonæ huius, Rectilineum constitutum super primam C D, ad ipsum M, constitutum super K L secundam, vt C D linea prima ad D G tertiam: ob id, per primam huius, vt C F ad F G: ob idq́;, per priorem partem septimæ Quinti, vt A ad F G: ac propterea, per secundam partem eiusdem, vt A ad B. Quare, per secundam partem nonæ eiusdem, erit M æquale B, Quod erat faciendum.

Sed erit promptius ex Permutata proportionalitate. Quum enim sit A ad M vt C F ad F G: erit permutatim, A ad C F vt M ad F G. Quum igitur sit A æquale C F, erit M æquale F G: Quare & æquale B, Quod erat constitutum.

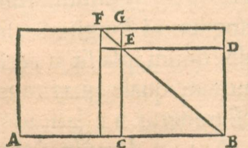
THEOREMA 20, PROPOSITIO XXVII.
Campano 26.

Super dimidio lineæ Parallelogrammum descriptum, maius est Parallelogrammo, quod super eandem lineam proiectum, alteri quod priori sit simile similiterq́; positum, specie deficit.

Sit linea A B, super cuius dimidio C B, descriptum sit Parallelogrammum C B D E, cuius Dimetiens B E: & super eandem A B sit proiectum A F Parallelogrammum, cuius vnum laterum secet latus C E in puncto G: deficiatq́; specie, Parallelogrammo F B simili similiterq́; posito ipsi C B D E. Dico Parallelogrammum C D esse maius Parallelogrammo A F.



Est enim, per primam huius, A G æquale C B: & per quadragesimamtertiam Primi, C F æquale F D. Itaque per communem Notionem, totus Gnomo C B D F, ipsi A F Parallelogrammo æqualis. Sed C D maius est ipso Gnomone: Quare & ipso A F Parallelogrammo, Quod fuit demonstãdum. Tanto autem est maius, quantum est E F Parallelogrammum.



Iam verò si A F altiùs erigatur, quàm C D, vt in secunda Figura: maius etiamnum erit C D ipso A F. Est enim, per primam huiusce, A G æquale G B. Ablatis ergo vtrinque duobus Supplementis Parallelogrammi E B inter se æqualibus: erit C D tanto maius A F, quantum est E F Parallelogrammum.

PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXVIII.
Campano 27.

Super data recta linea, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum aptare, deficiens specie Parallelogrammo, quod simile sit dato. Modò tamen Rectilineum datum maius non sit Parallelogrammo, quod super

dimidio lineæ datæ, ſimile Parallelogrammo dato conſtituitur.

Sit data linea AB, datumq; Rectilineum C: datum verò Parallelogrammum D. Volo ſuper linea AB ſic deſignare Parallelogrammum æquale Rectilineo C, vt deficiat ſpecie Parallelogrammo, quod ſit ſimile Parallelogrammo D. Oportet autem C non eſſe maius Parallelogrammo, ſuper dimidium datæ lineæ AB collocato, ſimili eidem D Parallelogrammo. Alioqui niteremur in præceptum antecedentis Propoſitionis.

Diuido AB per æqualia in puncto E: & per decimamnonam huius, ſuper dimidium BE, conſtituo Parallelogrammum EF, ſimile ipſi D. Tum ſuper tota AB, compleo Parallelogrammum ABFG. Quum ergo C Rectilineum, non ſit maius EF Parallelogrammo: ſi ſit eidem æquale, erit Parallelogrammum EG quale voluimus, per vigeſimã huius. Eſt enim ſimile ipſi EF: quum ſit eidem æquale & æquilaterum. Sin erit C minus, auferatur exceſſus ab ipſo EF, per ea quæ demonſtrauimus ad quadrageſimamquintam Primi: cui exceſſui ponatur, per vigeſimamſextam huius, æquale Parallelogrammum HKLM, & ipſi D ſimile. Ducam igitur in EF Parallelogrammo, Dimetientem BN: Et reſecabo ex FN, partem NO, æqualem lateri HK: Et ex EN, partem NP, æqualem lateri HL: Et ducam OQ & RP, quæ ſe ſcindant in puncto S: quæq; mutuò æquidiſtent lateribus totius Parallelogrammi AF. Eritq; interſectio ipſarum in Dimetiente BN, per vigeſimamquartam huius: quia NS æquale & ſimile ipſi HM. Producta demùm RP in AG ad punctũ T, dico Parallelogrammum AS eſſe quale proponitur. Deficit enim ſpecie, Parallelogrammo QR, quod eſt ſimile NS Parallelogrammo, per vigeſimamtertiam huius: atque ob id, ipſi HM: quapropter & ipſi D. Sed & æquale ipſi C Rectilineo. Nam quum AP, per primam huius, ſit æquale ER: & per quadrageſimamtertiam Primi, EF æquale SF: erit, per animi Notionem, ipſum AS, Gnomoni æquale: At Gnomon ipſi C æqualis: eſt enim NS exceſſus totius EF ſupra C Rectilineum. Quare & AS ipſi C Rectilineo æquale. Et idipſum ſuper linea AB conſtitutum, deficit ſpecie Parallelogrammo QR (quod eſt ſimile ipſi D dato), Quod faciendum fuit.

HOC autem Theorema cum iudicio tractandum eſt: vt etiam hoc ipſo loco annotauit Nicolaus Tartalea Brixellenſis, vir in re Geometrica ſeriò verſatus.

Sit enim, vt ipſe in exemplum proponit, area C Rectilinei, vigintiduorum pedum: & AB lineæ longitudo, duodecim: ſed D Parallelogrammi longitudo, ſit ſua latitudine duplo maior. Tum ſi ponatur BE longitudo: quum ipſa ſit 6, erit BF 3. Ac tum AS conſtitui non pòterit in Parallelogrammum quale quærimus: nempè, quin ſit maius ipſo EF. Nam EF erit 8 pedum. At ſi ponatur BE latitudo, erit BF longitudo 12: & EF Parallelogrammum, erit 72. Ac tum demùm ſtabit Problema. Quamobrem ea cautio erit, ne longitudo in BE dimidio lineæ ponatur.

Hoc igitur Problema, vt nihil diſſimulemus, eo minus Geometricum eſt, quo minus vniuerſale. Quinetiam in errorem inducere poſſit bene exercitatos. Quod ego longiori ſermone non explicabo. Satis fuerit admonuiſſe de errore vitando.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO XXIX.

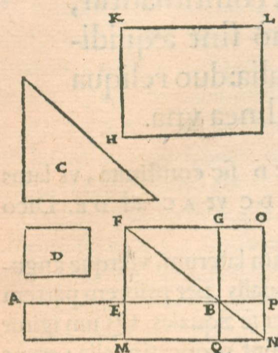
Campano 28.

Ad datam lineam dato Rectilineo æquale Parallelogrammum

grammum prætendere, excedens specie Parallelogrammum simile dato.

Sit data linea AB, datumq; Rectilineum C, & datum Parallelogrammum D. Volo ad AB lineam, applicare Parallelogrammum æquale Rectilineo C, excedens specie Parallelogrammum D.

Diuido AB bipartitò in puncto E: Ac per decimamnonam huius, super dimidiam BE constituo BEFG Parallelogrammum simile D. Parallelogrammo. Tum, per vigesimamsextam huiusce, facio HKL Parallelogrammum, ambobus C & BEFG æquale, & ipsi D simile: ac proindè ipsi BEFC.



Et quia HKL maius est ipso BEFG, & eidem simile: maiora quoque sunt latera KH & KL, lateribus FE & FG. Producantur ergo FE & FG ad æqualitatem ipsorum KH & KL: & perficiatur Parallelogrammum FMNO, simile & ęquale ipsi HKL, ac proindè æquale vtrisque C & EG: & insuper, simile ipsi EG, per vigesimam huius: ob idq;, circa eandem Dimetientem per vigesimamquartam eiusdem: quæ Dimetiens sit FN, educta per punctum B. Et producatur AB, donec secet ON in puncto P: perficiaturq; Parallelogrammum AN. Quod dico esse quale voluimus: scilicet, excedere Parallelogrammum D, Parallelogrammo QP, quod est simile ipsi D.

Id verò constabit, protracta GB, donec secet MN in puncto Q. Est enim, per primam huius, AM æquale MB: & per quadragesimamtertiam Primi, communemque Notionem, æquale ipsi GP. Si ergo vtrique addatur EN: erit & per animi Notionem, AN æquale Gnomoni ENG. Atqui Gnomo est æqualis ipsi C Rectilineo: quum totum FMNO Parallelogrammum, positum sit æquale vtrisque C & EG. Quare AN est æquale ipsi C. Sed & simile ipsi EG, per vigesimamtertiam huius: ac proindè ipsi D, per vigesimam eiusdem, Quod facere oportuit.

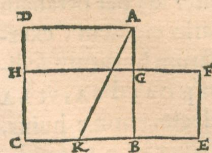
PROBLEMA 10, PROPOSITIO XXX.

Campano 29.

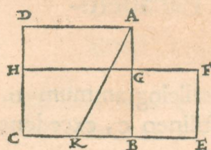
Datam rectam lineam secundùm extremam & mediam rationem diuidere.

Quid sit lineam secundùm mediam & extremam rationem diuidi, ostendit tertia Definitio huius Sexti.

Sit data linea AB diuidenda secundùm mediam & extremam rationem. Ex ipsa AB describo Quadratum ABCD: & per antecedentem, applico ad latus BC, Parallelogrammum CEF, æquale Quadrato AC, excedens specie Parallelogrammum eidem AC simile: & latus FH æquidistans CE, secet lineam AB in puncto G. Dico lineam AB esse diuisam secundùm mediam & extremam rationem, in ipso G puncto: esse scilicet AB ad BG vt BG ad GA.



Quum enim BF sit Quadratum, nempe simile ipsi AC: duæ BG & GF sunt æquales. Sed & GH ipsi AB æqualis: vtpotè æqualis ipsi AD, per trigesimamquartam Primi. Et quia AC & HE sunt ęqualia, dempto ab vtroque CG, supererunt DG & GE æqualia. Quumq; angulus G vnius, sit æqualis angulo G alterius: erunt ipsorum latera reciprocæ rationis, per decimamquartam huius. Quapropter HG ad GF vt BG ad GA. Et quia AB



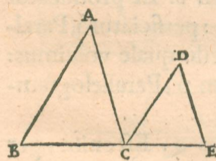
est æqualis HG, & GF ipsi BG: erit AB ad BG vt BG ad GA, Quod erat constitutum.

ALITER probatur ex secunda parte decimæseptimæ huius. Constat enim DG esse id quod fit ex AB in AG: item BF esse Quadratum ex BG. Quare tres lineæ AB, BG & GA sunt proportionales, Quod erat faciendum.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXXI.
Campano 30, Theoni 32.

Si duo Triangula ad vnum angulum sic constituantur, vt duo latera duobus lateribus mutuò sint æquidistantia, & eadem inter se proportionalia: duo reliqua ipsorum latera in directum erunt, & linea vna.

Sint duo Triangula ABC & CDE, ad angulum ACD sic constituta, vt latus AB æquidistet lateri DC, & AC ipsi DE: sitq; AB ad DC vt AC ad DE. Dico duas bases BC & CE esse in lineam vnam.

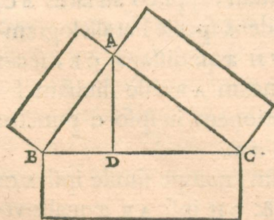


Est enim propter æquidistantiam laterum, vterque angulorum A & D, angulo ACD æqualis: per priorem partem vigesimænonæ Primi: ob id, inter se æquales. Quum igitur latera ipsos angulos continentia, sint proportionalia: erunt Triangula, per sextam huius, æquiangula: & angulus B, æqualis angulo DCE: angulusq; ACB, æqualis angulo E. Itaque, per trigesimamsecundam Primi, tres anguli qui ad C, duobus rectis sunt æquales. Quare, per decimamquartam Primi, duę lineæ BC & CE sunt in directum, & in lineam vnam, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.
Campano 31.

In Triangulis Rectangulis, quæ à maximo laterum producitur Species, æqualis est iis quæ à duobus reliquis lateribus similes similiterq; positę producuntur, Speciebus.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A rectus. Dico Speciem quæ à maximo latere BC producitur, esse æqualem ijs quæ à duobus lateribus AB & AC ipsi Speciei BC similes & similiter positæ producuntur.



Ab angulo A demittam AD perpendicularem ad latus BC. Et erunt duo Triangula ABD & ADC, similia toti ABC Triangulo & inter se, per octauam huius: Quapropter, ex Consectario eiusdem, exurgunt duæ proportionalitates ternarum linearum: scilicet BC ad CA, vt CA ad CD: itemq; CB ad BA, vt BA ad BD. Itaque ex Consectario decimænonæ huius, Species quæ ex BC prima, ad eam quæ ex CA secũda, similiter describitur, est vt BC prima ad CD tertiam: itemq; Species quæ ex CB prima, ad eam quæ ex BA secunda, similiter describitur, est vt CB prima ad BD tertiam. Species igitur quæ ex BC, ad eas quæ ex CA & BA simul, est vt BC linea ad BD & DC simul. Atqui BC æqualis est ipsis BD &

DC

D C. Æqualis eſt igitur Species quæ ex B C, duabus quæ ex C A & B A ſimiliter deſcribuntur, Quod erat demonſtrandum.

HVIVS Demonſtrationis concluſio ſimplex (eſt enim citra autoritatis teſtimonium) apertior eſt, & obſcuritatem tollit. Si quis verò rationem à ſe exigere velit, ſic expendat. Species quæ ex A C, ad Speciem quæ ex C B ſimiliter deſcribitur, eſt vt D C ad C B, per ipſum Conſectarium decimænonæ & Conuerſam proportionalitatē: itemq; Species quæ ex A B, ad eam quæ ex ipſa B C ſimiliter deſcribitur, eſt vt B D ad eandem B C. Iam verò ponatur Species A C prima, & Species B C ſecunda: linea verò D C tertia, & B C quarta. Et inſuper, Species A B quinta, linea verò B D ſexta. Ac tum, ex vigeſimaquarta Quinti, erūt Species A C prima & Species A B quinta ſimul, vt linea D C tertia & B D ſexta, ad B C quartam. Atqui B C linea eſt æqualis duabus B D & D C. Igitur & Species quæ ex B C, æqualis eſt duabus quæ ex A C & A B, Quod fuit demonſtrandum.

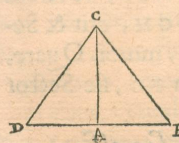
ALITER. Similes Figuræ duplam inter ſe habent rationem quàm ſimilis rationis latera, per vigeſimam huius. Species igitur quæ ex B C, ad Speciem quæ ex C A ſimiliter deſcriptam, erit vt Quadratum quod ex ipſa B C, ad Quadratum quod ex C A: quum vtrinq; ſit dupla ratio quàm laterum. Eodem modo quæ ex B C Species, ad eam quæ ex B A ſimiliter deſcribitur, erit vt Quadratum ipſius B C ad Quadratum ipſius B A. Quapropter & ſicut Species quæ ex B C ad duas quę ex C A & B A, ſic Quadratum quod ex eadem B C ad duo quæ ex C A & B A Quadrata. At Quadratum quod ex B C, æquum eſt Quadratis quæ ex C A & B A, per quadrageſimamſeptimam Primi. Quare Species quæ ex B C, æqualis eſt duabus quæ ex C A & B A ſimiliter deſcriptis Speciebus. Quod fuit demonſtrandum.

Hæc igitur generatim complectitur Pythagoricam, ſcilicet quadrageſimamſeptimam Primi: & per ipſam (quodam tamen veluti præpoſtero modo) probatur. Illa enim ex hac innoteſcere debuit. Geometria quippè generatim & in vniuerſum, quantùm poteſt, proponit. Sed tamen Quadrati dignitas ſeparatam ac peculiarem ſibi demonſtrationem aſſumere potuit.

Conuerſa autem huiuſce, ex Campani Demonſtratione erit eiuſmodi.

Si quæ ab vno laterum Trianguli ſit Species, æqualis fuerit ijs quæ à duobus reliquis lateribus fiunt, Speciebus ſimilibus ſimiliterq; deſcriptis: Rectangulum eſt Triangulum.

Sit Triangulum A B C: ſitq; Species quæ ex B C, æqualis duabus quæ ex A B & A C ſimiliter deſcribuntur. Dico angulum A eſſe rectum.



Ponam angulum C A D rectum: Et connectam D C. Eritq; per hanc trigeſimamſecundam, Species quæ ex C D, æqualis duabus quæ ex A C & A D ſimiliter deſcribuntur: Quapropter & æqualis ei quæ ex B C ſimili: quum hæc quoque ſit, ex poſitu, æqualis duabus quæ ex A C & A D. Erit ergo linea D C ipſi B C æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus B A C rectus, Quod erat oſtendendum.

Poterit & ab impoſſibili demonſtrari, quomodo vltimā Primi probauimus. Quod ſatis intelliget, qui noſtram Demonſtrandi rationem illîc perceperit.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

In Circulis æqualibus, anguli & qui ad Centra, & qui ad Peripherias conſiſtunt, inter ſe ſic habent, vt Arcus illos angulos ſuſcipientes. Sed & ſic Sectores inter ſe.

Sint

Sint Circuli æquales, ABC, cuius Centrum D: & EFG, cuius Centrum H: sintq; ad Centra, duo anguli BDC & FHG: duo item ad Peripherias, BAC & FEG. Dico primùm ipsos BDC & FHG angulos inter se, duosq; BAC & & FEG inter se eam habere rationem, quam Arcus BC ad Arcum FG.

Connectam rectas BC & FG. Et continuabo ipsis duobus Arcubus alios Arcus æquales, siue eodem numero, siue dispari: sitq; Arcus BK, per vigesimamseptimam Tertij, ipsi BC æqualis: duo verò FL & LM, ipsi FG Arcui, per eandem, æquales: nempè ducta linea BK, quæ sit rectæ BC æqualis, per primam Quarti: & per eandem, FL & LM, quæ sint ipsi FG æquales. Hinc connectam KD & KA: indè verò LH & MH: tum LE & ME.

Et erunt, per vigesimamsextam Tertij, anguli qui ad D, inter se æquales: & qui ad H, inter se: itemq; qui ad A, inter se æquales: & qui ad E, inter se. Quàm multiplex igitur est Arcus KC ipsius Arcus BC, tam multiplex angulus KDC anguli BDC, & angulus KAC ipsius BAC. Itidem quàm multiplex est Arcus MG ipsius Arcus FG, tam multiplex angulus MHG, anguli FHG: angulusq; MEG, anguli FEG. Quapropter si Arcus KC est æqualis Arcui MG, est & angulus KDC æqualis angulo MHG: & angulus KAC, angulo MEG: & si maior, maior: & si minor, minor. Quare per sextam definitionem Quinti, erit Arcus BC ad Arcum FG, vt angulus BDC ad angulum FHG, atque angulus BAC ad angulum FEG, Quod est prius.

Dico insuper, esse Sectorem DBC ad Sectorem HFG, vt est ipse Arcus BC ad Arcũ FG. In ipsis BC & BK Arcubus, suscipiantur duo signa N & O: & connectantur BN, KN: BO & CO. Eritq; Triangulum BDC, æquale Triangulo BDK: per definitionem Circuli & quartam Propositionem Primi: quum sint anguli qui ad D, æquales. Et quoniam Arcus BC æqualis est Arcui BK, erit reliquus BCK, reliquo BKC æqualis: Quapropter angulus BOC æqualis angulo BNK, per vigesimamsextam Tertij. Duo igitur Segmenta BNK & BOC, similia, per decimam Definitionem Tertij: quapropter & æqualia, per vigesimamtertiam Propositionem eiusdem. Totus igitur Sector DBC, toti Sectori DBK est æqualis. Eadem argumentatione erunt Sectores HML, HLF, & HFG inter se æquales. Æquemultiplex igitur est Sector DCK, Sectoris DBC, vt Arcus CK ipsius Arcus CB: & Sector item HGM æquemultiplex Sectoris HGF, vt Arcus GM ipsius Arcus GF. Si itaque fuerit æqualis Arcus CK, Arcui GM, erit & Sector DCK æqualis Sectori HGM: & si maior, maior: & si minor, minor. Quare, per Conuersam sextæ Definitionis Quinti, vt Arcus BC ad Arcum FG, sic Sector DBC ad Sectorem HFG, Quod erat demonstrandum.

Ex iis consequitur, vt est Sector ad Sectorem, sic esse angulum ad angulum.

Libri Sexti Elementorum Geometricorum

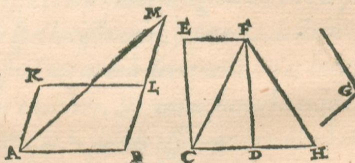
FINIS.

LECTORI.

In hac operis nouitate quàm difficile fuerit omnia integra præstare, nobis tacentibus, res ipsa loquitur. Nostrum verò officium fuit, vt de erratis, quæ à nobis ante emissionem internosci potuerunt, te moneremus. Quorum bonam partem sub prælo deprehendimus, & in reliquas chartas restituimus: nequis interim ex ijs locis quos hoc catalogo pro mendosis citauimus, plerosq; integros esse miretur. Cæterùm quæ diligentiam nostram effugerunt, tuum erit benignè condonare.

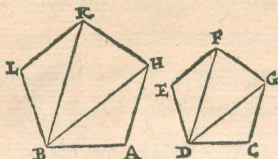
Pagina 3, *linea* Superficiei *pro* Sphericæ *lege* Circularis
Pagina 4, *linea* Angulum Rectum *pro* sectionis *lege* intersectionis
Pagina 6, *linea* Definitionis & *sequenti*, *ab ijs verbis* vnica linea *sic repone*, vnica linea contineatur: sed quatenus Superficies, pluribus contineri possit.
Pag. 13, *linea vltima*, *pro* Circulum *lege* Circulorum
Pag. 16, *linea* dicij *pro* quas, quia *lege* quas, quanquam
Pag. 18, *linea* ABC, cuius *pro* & Triangulum ACD, cuius basis AD *lege* & Triangulum ACB, cuius basis AB
Pag. 26, *linea* mamsextam *pro* ipso BDC *lege* ipso BEC
Pag. 32, *linea* A puncto *pro* perpendicularem AB *lege* perpendicularem AD
Pag. 37, *linea* rallelam *lege* parallelum

Pag. 43, *in Figura quæ initium habet Paginæ, deest nota* B. *Sic ergo reponenda*



Pag. eadem, lin. datur *pro* datur ipsius parallelus interminata *lege* dantur duæ paralleli interminatæ.
Pag. 49, *linea* cie *lege* cies
Pag. 58, *linea* enim *expunge* ex
Pag. 65, *linea* figura, *pro* & BG *lege* & FG
Pag. eadem, lin. ÆQVALES *deest Figura huic loco accommoda, sed quam Lector facilè subaudiat.*
Pag. 66, *linea* ctis B & E *pro* Hanc etiam *lege* Hanc etiam BE
Pag. 75, *linea* BAC *pro* si BAH *lege* si BAC
Pag. 76, *linea* lorum KAH *pro* KAH & NAF *lege* KAH & NAM
Pag. 78, *linea* cti, omninò *pro* DE *lege* ST
Pag. 90, *linea* ctis lineis *vbi sic legitur* æqualis angulo D dato, Quod fuit faciendum. *sic repone* æqualis angulo EAB, per trigesimamprimam huius: Quare & angulo D dato, Quod fuit faciendum. *Erat enim ob Laconismum obscura conclusio.*
Pag. 109, *linea* ptereà *pro* tertia pars *lege* sexta pars
Pag. 124, *linea* ipsius *vbi legitur* Eruntq; vt FK *expunge* vt
Pag. 135, *linea* pani *pro* incitando *lege duabus vocibus* in citando
Pag. 140, *lin.* les habent *pro* habent *lege* continent
Pag. 140, *linea* Id est, *pro* linea *lege* lineam
Pag. 143, *linea* CB *lege* CE

Pag. 156, *Figuram vigesimæquartæ Propositionis sic repone, vt pro lineis* AK & CF, *ducantur* BH & DG, *iuxta Demonstrationis sententiam.*





IACOBVS PELETARIVS IOANNI FRATRI, NAVARRÆORVM GYMNASIARCHAE S.





Vòd meas in Euclidem Demonstrationes amplißimo Cardinali Lotharingo tua sponte promisisti & recepisti, pergratũ mihi est. Atq; eò etiam gratius, quòd homines intelligunt, id te nõ tantùm meo in te amore fretum, sed etiã singulari iudicio inductũ, fecisse. Virũ enim delegisti ex Principum familia: sui ordinis spectatißimum, sapientia, doctrina, autoritate. Equidem apud me anteà decreuerã, meas lucubrationes, his præsertim temporibus, nullius nomine emittere. Sic enim statuebam, in tanta rerũ concertatione, ac perturbatione potiùs, Musas in paruo esse numero apud eos qui studiorum adiuuandorum potestatem haberent: non quòd eos sua voluntate à literis alienos esse iudicarem, sed temporum neceßitate distractos, se ad literaturam aut animo aut cogitatione conuertere non posse. Ea etiam re, in meo consilio firmiùs permanebam, quòd ab ijs locis remotus essem, in quibus eius generis occasiones opportunè captare & vrgere solemus. Sed me tua pollicitatio commodè ab instituto reuocauit: mihiq; spatium ad cogitandum dedit, Cardinalem à prima ætate in literis educatum, cuius dignitas & amplitudo cum eruditione accreuit simul, tot iam hominum doctorum nuncupationibus celebratum, immò publicorum studiorum Principem & autorem, nullum tempus ab ingenuis artibus alienum habere posse. Est enim constanti omnium sermone, & rerum ipsarum probatione, quas summas gerit, alta quadam mente præditus, & qui mirabili solertia suis temporibus omnia diuidere nouit. Occurrit tui apud illum non noua notitia, & mei fortaße nominis aliqua commendatio. Quibus rebus non leuiter spero, nobis hunc aditum honori & ornamento futurum. Id verò totũ iam indè tibi acceptum refero, & in eximio quodam numero pono tuorum erga me meritorum. Quæ certè tanta sunt, quanta à fratre expectare potui aut debui. Te enim ab ineunte mea adolescentia studiorum meorum moderatorẽ habui, & in Philosophiæ initijs etiã præceptorẽ. Ac pòst, emergente ætate, ad vitæ institutionẽ te mihi prudentißimum monitorẽ fuisse semper cognoui. Nam quum vestris omnium fratrum consilijs tandiu paruerim, quandiu aut ætas aut naturæ ductus tulit, tibi vni præ cæteris auscultaui. Scis enim me Victorio impulsore, totum penè quinquennium in legum studio consumpsisse. Quod institutum mihi nouitatis studio aliquandiu non displicuit: certè quum ætas ad maturitatem spectare cœpisset, meiq; iuris

ac mancipij essem, vaga illa rerum forensium tractatione deterritus, ad Philosophiam redij, & te autore ad Medicinam me conuerti. In qua me magnoperè delectauit Naturæ locupletissima historia: ad eamq; professionem satis libenter meæ vitæ modum direxi & composui. Ex illa, me meus Genius ad Magnatum aditum conquirendum interpellauit. Ubi quantùm profecerim, me certè non pœnitet. Quod enim præter animi sententiam accidit, vtrum mea culpa an meo quodam fato acciderit, nihil dico: vnum hoc dico, me ex ea assectatione, ad vitæ rationem multa præcepta reportasse. Hominum enim diuersa consuetudo mihi non parua accessione iudicium confirmauit: & scribendi facultatem comparauit. Nemo enim quicquam laude dignum scribet vnquam, nisi qui rerum ipsarum variam cognitionem ad studium illud vmbratile adhibendam sibi proposuerit. Quippè quum ad scribendum sit Genius quidam, qui si lectione tantùm foueatur, non etiam experientia & vsu roboretur: non consistet, neque ad ætates ferendas idoneus euadet. Atque ea de causa, quæ in Poëtico genere scripsimus, ad temporum memoriam transitura speramus. Certè Oratio nostra Pacificatoria nos rerum non ignaros esse testatur. Quæ verò in Mathematicis scribuntur, ex rata & firma veritatis professione, suum habent Geniũ immortalitatis. Poëticen quidem amplexi sumus, animi impetu & ardore quodam, pòst etiam ingenij concertatione. Sed deferbuit iam illa laudis contentio nostra. Poëticos illos spiritus sensim remitto: Mathematicas in perpetuum retineo. Hæc enim studia mihi destinata esse sentio. Quibus quum anteà delectarer, nunc etiam viuo. Quid facerem? honores non sitio: gloriam non desidero. Interim tamen sic viuo (dicam enim apud te ingenuè id quod res est) tanquam id quod non postulo, expectem. Eas disciplinas colo & amo, non modò quòd, vt ille de re rustica dicebat, minimè malè cogitantes sint qui in eo studio occupati sunt: sed quòd omniũ maximè diuinas esse iudicem. Theologiam vestrã excipio: nisi rerũ diuinarũ cognitio è Mathematicis emersisse concedatur, Platonis testimonio, qui Deũ sine fine γεωμετρεῖν existimabat. Nam quid ego de Numeris dicã? quorum consecutio & natura, imaginẽ quandam æternitatis refert. Rerum concordiam, animorumq; sympathiã euidentissimè exhibet Musicæ harmonia. Diuini illius opificij principia, & constitutionem certissimis dimensionibus firmatam, obijcit Geometriæ speculatio. Denique ad Deum Optimum Max. suspiciendum, animos nostros erigit rerum cœlestium contemplatio. Quanquam scio te in eo à me valde dissentire. Mihi enim per literas declarasti, Mathematicas vestræ Theologiæ alienas, & propè contrarias esse. Equidem illud de te miror: quum eas artes olim docueris, dum Philosophiæ stadium conficeres: per quas etiam vobis aditum ad vestram disciplinam præstruitis. Quid? an existimabimus veteres Academiarum nostrarũ principes, Mathematicas vt necessarias, præscripsisse, vt post demùm tanquã inutiles, immò contrariæ repudiarentur? Sed non est huius loci hæc disputatio. Ad propositũ reuertor. Demonstrationes nostras in sex Libros qui de Planis scripti sunt, iam tandem emittimus. Quod à nobis citius esset factum, nisi operis difficultas Typographos esset remorata. Te igitur promissis libero: & meam fidem iam indè singulari quodam pacto apud Cardinalem astringo: & Deo iuuante præstabo. Neque enim nisi perfecta re, conquiescam vnquam. Vos verò mirum in modum videre cupio, totusq; Lutetiam vestram cogito, huius longinquitatis temporum & locorum pertæsus. Atque ea re, hanc

hanc profectionis occasionem mihi esse oblatam vehementer etiam atque etiam lætor. Tu interim me fraternè, quod facis, ama. Alexandro, Victorio, & Petro fratribus, Cenomanis salutem meis verbis scribes, Iuliano istic dices. Vale. V. Id. Aprilis, Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS PONTO TIARTO S.



QVVM essem apud te in Bissiano, multumq; ac sæpe de studijs nostris inter nos colloqueremur: dixisti te Euclidem Ciuibus nostris dare constituisse. Idq; libentiùs te facturum esse significasti, quum meas demonstrationes in sex Libros Elementorum priores, tibi ostendissem: quas tibi valde probari sensi. Equidem, cùm mea, tum publica etiam caussa, consilium tuum laudo, & mentem istam tibi gratulor. Neque enim ex amicis chariorem, aut ex nostris hominibus doctiorem mihi optare poteram, qui meas lucubrationes nostræ nationi commendaret, quàm te vnum. Quod enim de me dicere soles, me in scribendo tantum industriæ ponere, id ego in teipsum refero: cuius diligentiam & solertiam cùm in rebus omnibus, tum in ipsa scribendi facultate singularẽ admiror. Quumq; ad meã vtilitatem semper cum Poëticis res Mathematicas coniunxerim, idem tibi vsuuenisse video, & vehementer gaudeo, nostra vtriusque gratia: quò communitas illa studiorum & voluntatum inter nos sit illustrior. Ac tametsi patrio sermone scribere desij, nunquam tamen hanc meæ genti gloriam felicitatemq; inuidebo, vt linguam copia, splendore, dignitate, omni denique opum genere auctam & ornatam aliquando habeat. In quod ego officium, summa ope paulò antè nitebar. Id verò nulla ratione commodiùs fiet, quàm si optima quæq; ad ipsam traducantur. Incumbe igitur, mi Tiarte, in eam, vt facis, prouinciam. Tibi enim in isto quo frueris otio, nihil est quod maiori gloriæ aut ornamento esse posit. Demonstrationes meas ad te mitto. Ex quibus quidquid laudis à temporum memoria ostenditur, id te mecum participare cupio. Quinetiam tu apud nostros non dubito quin maiorem gratiam sis consecuturus, quàm ego: qui iam aliud nihil expecto, quàm vt me primo quoque tempore desertorem appellent. Habent tamen à nobis alia non vnius generis officiorum monumenta: quæ vtinam tam grata sint, quàm ab animo liberali sunt profecta. Nunc ad Romanos transeo. A quibus ampliorem honestioremq; conditionem nescio quo augurio mihi polliceor. Ea enim gens omni memoria, quos semel in fidem recepit, sanctißimè retinuit, & fortißimè propugnauit. Galli verò externorum vnicè amantes, & suorum egregij contemptores semper fuerunt. Quæ res, opinor, effecit, vt me tandem aliquando Gallum profiterer, & ad exteros transfugerem. Sed heus tu, inquies: quò te is perditum? Eiusmodi mores nemo Romanus æquo animo feret. Equidem illos aut omninò mihi exuendos, aut gnauiter dißimulandos esse video, nisi quòd caussam meæ defectionis probaturus sum: &, quod caput est, in fide permanebo. Sciunt enim qui me norunt, quàm sim firmus in

retinendis consilijs. Sed hæc posteriora quanquam tecum iocatus sum, tamen ridentem dicere verum nil vetat. Ad Euclidem redeo: quem, vt instituisti, Gallicè tractabis: hoc est, per te, splendidè: &, per patriam, opiparè. Neque enim tibi verba innouare erit religio in argumenti nouitate. Quæ quum suo charactêre insignita erunt, neque lucem reformidabunt, neque ciuitate reijcientur. Demonstrationes nostras concisas illas quidem, sed tamen, ni fallor, appositas comperies. Laconismum verò, si videbitur, longius extendes. Licet enim diffusas Demonstrationes non probem, tamen nostros Ciues huic disciplinæ minimè assuetos, prolixius docere non erit alienum. Siquid autem erit quod diligentiam nostram aut animaduersionem effugerit, id tu repones, amici officio. Nunquam enim doctorum hominum castigationes molestè tuli: sed in hac imprimis tractatione veritatis, etiam imploro. Atque adeò, vt tu sis sciens, ego mea scripta ad Momi lucernam dispici & examinari cuperem: qui etiam in Euclidem animaduerterim, vt iam tum apud vos tibi communicaui. Quinimmò hanc editionem maturaui, vt si quæ essent minus rectè posita (quidni verò futura sunt?) in tempore deprehensa, à me reponerentur in melius. Leuem quippè existimationis iacturam esse iudico, quæ solidam emendationem in perpetuum ostendit. Vellem tamen hæc à me sine causa in dubitationem afferri. Vtut erit, ego non tam properationis pœnas sum daturus (scis enim quandudum hoc saxum voluam), quàm securitatis. Nam in ijs quæ procliuia visa sunt, me ferè præcipitem dedi. Scis etiam me, nisi in difficilibus immorari non solere. Sed nos de his pluribus verbis inter nos. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS PETRO RONSARDO S.





SCIS quanti te semper fecerim, mi Ronsarde. Me verò abs te non par ui fieri exploratum habeo. Nam & amicitiæ nostræ memoriã mutuo testimonio posteritati prodidimus. Quod certè ad vitam ipsam non parum affert momenti. Habet enim ea publica confirmatio singularem quandam delectationem. Sed & ad me valde pertinere arbitror (neque te aliter esse affectum existimo) vt omnis ætas intelligat, nos non modò temporum, sed etiam animorum coniunctione copulatos fuisse. Igitur ex tuis scriptis voluptatem, & gloriam capio. Etenim ea demùm iucunda & honorifica laus, quæ ab ijs proficiscitur, qui & ipsi in laude viuunt. Id tamen nescio an in laudationis loco sumere debeam, quòd tu me putas ab amore destitisse, & ea re saluum esse. Méne amoris expertem vnquam esse posse? An non ex scriptis meis constantiam, atq; adeò obstinationem meam perspexisti? Immò omninò amore abundo. Ego illa, quam ita superbam & fastidiosam habui, iam vtor benigniore. Quid tu putas? Ex quinq; illis quæ Amor ostendit, præmijs, basium accepi. Sed non pergam tecum alludere. Amorem illum Platonicum significo: hoc est, vt scis, diuinum. Ex quo eum quem percipio fructum, totum statim communico: riualesq; mihi paro, præter amantiũ morem. Atq; adeò in huius felicitatis partem, nullum mihi socium dari malim, quàm teipsum. Scis enim

enim quanta fuerit dudum inter nos studiorum consensio & conciliatio. Ex quo tempore etiam nobis tertius adscriptus est Ioachimus Bellaius. Qui quum à nobis iam tanto temporum locorumq́ interuallo distractus sit, quo in me sit animo nescio. Id de me scio, me illius memoriam magna cum beneuolentia tenuisse. Necessitudinem enim illam, quæ Musarum beneficio & sanctione constituta est, nulla vi temporum infringi posse iudico. Quod tu perpetuò in nostra amicitia retinenda declarasti. Memini, quum esses etiamnùm adolescens, me aliquot annis superiorem quanta beneuolentia obseruares, Musarum nomine: à quibus quum anteà ad Regiam assectationem abductus fuisses: ad eas te recepisti felicissimo postliminio. Varium enim & omni numero Poëma scripsisti: vt ea quæ hoc tempore sunt apud nostros in manibus, scriptorum genera, multi secuti sint te magistro. Matheseos verò studium, quantam dignitatem afferat operi Poëtico, nihil attinet commemorare, apud te præsertim in disciplinis apprimè eruditum. Sed & ipsius Geometriæ lineamenta, quanuis in Poëtis minus elucere videantur: ea tamen vna ars cæterarum artium proculdubiò dux & magistra est. Nosti enim Platonis illud peruulgatum, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Ad hæc, incredibilem illa voluptatem affert, certissima specie & consecutione præceptorum. Ad quam ego te hortarer, nisi te scirem ad optima quæque tuo ductu amplectenda & consequenda natum & educatum. Habes ad res summas, præcipua illa adminicula, ingenium, genus, fortunas: neque tibi quicquam deest ad benè beateq́ viuendum. Ego verò in eorum studiorum commemorationem incido, animi mei alacritate quadam impulsus: quam mihi parit maximam, eiusmodi meditatio. Quinetiam ad Mathematicas artes cohortationem nuper scribere ingressus soluta oratione, nescio quo impetu in versus erupi: quos è medio transscriptos tibi mitterem, nisi id totum in aliud tempus reseruassem. Eos tamen tibi coràm recitabo, ne me putes Phœbum deseruisse, aut Musas alienas habere: quum etiam Romana poëmata pangam. Sic ego sum: sic vtor otio meo: dum tu Principes amplecteris, & in gratia apud eos viuis. Tibi verò seriò gratulor istam fortunæ & genij facilitatem, cui & ad summorum hominum beneuolentiam retinendam, & ad operam studijs & scriptis impendendam abundè tempus suppeditat. Ego autem nihil ex animi sententia, nisi in secessione & solitudine possum scribere. Nos, vt spero, de ijs propediem otiosè colloquemur. Vale: & te à nobis tantùm amari ne dubites, quantùm nos abs te cupimus & confidimus. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS MAVRICIO SCÆVÆ S.



EXPOSVISTI *aliquando mihi nonnullorum querelas, qui dicerent me nimiùm mihi viuere, atque hominum consuetudini & gratiæ parum seruire. Quod genus expostulationis scis me non prorsùs contempsisse, sed tamen satis leuiter tulisse: præsertim quum, vt præ te ferebas, id non tuo iudicio, sed ex aliena opinione proponeres. Quinetiam te meam caussam suscepisse, & iniquos de me sermones depulisse intellige-*

bam: quod ipsum mihi pro nostra amicitia gratissimum fuit. Fateor, Scæua, me artificia illa beneuolentiæ colligendæ exquisitè non obseruare. Probitate enim amicitias mihi comparandas & conseruandas semper existimaui potiùs, quàm gratiosa commendatione, aut affectata diligentia: quanquam, quum opus fuit, mihi non defuerunt adminicula fouendorum hominum. Sciunt ij qui me norunt, quanta fuerit temporum meorum varietas: quam non tam facilè sustinuissem, nisi mihi esset aliqua non malè subducta ad viuendum ratio. Scio ego quàm facilè incidere soleam in sermones hominum: immò adeò, quàm facilè mea fortuna inuidos & obtrectatores inueniat. Quid dico fortunam? fatum dicere debui. Neque enim felicitate inuidiam mihi concitaui: an virtute, nescio: certè id operam dedi, ne meo merito. Mea sic semper fuit vitæ ratio: Qui mihi res suas bona fide commiserunt, à me nunquam decepti sunt: qui de mea voluntate non obscurè dubitarunt, quam alioqui perspectam non haberent, ijs non admodùm succensui: sed vt de me quamoptimè sentirent sedulò curaui. Qui verò meam fidem tentare, aut simplicitatem intercipere conati sunt, eorum consilia aut arte, aut patientia, aut distractione elusi. Qui simulatq; sibi ereptum senserunt quod à mea facilitate sibi promiserant, ibi repente simultates gerere cœperunt, à me certè non ortas, sed ab ipsorum artificijs. Nihil enim grauiùs detestor, quàm astutias: quas ne meo quidem commodo ferre possum. Eas autem explorare & olfacere meo periculo didici, sæpè ab amicis desertus, non semel etiam proditus. De quo apertiùs essem conquestus, nisi me ad lenitatem finxisset natura, ad æquabilitatem Philosophia: qui ne inimicis quidem restiti lacessitus, nisi ijs quos saluis meis rebus missos facere non potui. Nemo vnquam ad conquirendas amicitias propensior, nemo eorum quibuscum vixi, studiosior fuit, quàm ego ante hoc tempus fuerim. Id quia nimis accuratè feci, multi omnia à mea lenitate sibi deberi arbitrati sunt: neque iam integrum mihi esse putant à meo more discedere. Siquid de illa salutationum consuetudine præterij, si inuisendi officium intermisi, si adeundi copiam non feci, si colloquendi facultatem non dedi, me morosum, me singularem esse queruntur. In eam verò partem liberalitatis deinceps, si potero, non peccabo: ne à me sit alijs peccandi occasio. Me iam tempus admonet, vt eam quàm ipsi me docuerunt, cautionem mihi adhibeam: & meam familiaritatem abuti desinam cum ijs qui familiaritate vti nesciunt: Si modò hoc consilium mihi ratum esse poterit: vix certè erit. Noui enim me, quàm sim φιλανθρωπίας morbo obnoxius. Atenim tempori seruiendum. quasi verò quicquam intersit, vtrum tempori cedas, an seruias. Ego quum multorum arbitrio viuere non possim, meo modo aliquando mihi viuendum esse statui. Totam eam amicorum turbam, qui omnia temporis caussa faciunt, non officij, à me excutiam: paucos mihi aptos retinebo, si multos nõ liceat: quos ego tanti faciam, vt quum ab ijs me amari sensero, cæteros qui me non amabunt, neque amicitiæ vim tenere, neque virtutis amantes esse putem. Alij dum versor in solitudine, dum intra eos quos mihi Philosophia circundedit cancellos, me contineo: se molliter curent: per me licet. Meas res aduersas, quibus isti me oppressum esse putant, faciliùs fortaßè feram, quàm ipsi suas, in quibus volutantur, delicias. Intereà siquid præter spem acciderit, aut in melius interpretabor, aut arte corrigam: siquid boni, id in lucro deputabo, sicut me Comicus docuit. Si in ea vitæ fabula mihi felicitatis persona non obtigerit,

virtutis

virtutis certè non deerit. Gaudebo minus, at minus dolebo. Id verò pro mea parte enitar, vt ad omnem vitæ statum subsidia mihi parare possim. Præter hæc, non tam laborabo quibus charus sim, quàm quibus charus esse debeam. De multis hactenus & priuatim & publicè bene merui. Qui si in officio aliquando erunt, eorum voluntati, quoad potero, non deero: & meam operam bene collocatam esse lætabor: si minus, meorum meritorum & laborum conscientia me consolabor. Sed quàm vellem, vt ij qui meam ab officio, vt ipsi expostulant, cessationem accusant, de meis laboribus cognoscere & iudicium ferre didicissent: ij, vt opinor, me de tota ea accusatione absolui paterentur. Sed in hac re non dubito quin æquis rerum æstimatoribus caussam meam sim probaturus. Eos qui aut præsumpto quodam studio, aut simulatione omnia metiuntur, nihil morabor. En Euclidem meæ in Rempub. perpetuæ voluntatis nouum obsidem offero. In quo vtinam aliquando te occupatum videremus, Scæua. Tum demùm intelligeres, quanta fruantur voluptate ij, qui se à multitudine ad tempus remouent: quanquam id te aliquando expertum esse, res ipsa ostendit. Singulare enim specimen è solitudine edidisti. Sed ea, quam nos in te conspicimus, ingenij solertia maius quippiam à te requirebat. Te Geometria poscere videbatur. Quod à te an expectare debeamus, in te positum est. Si animum induxeris, nihil est quod in Mathematica perceptione non sis effecturus. Te quidem ætas affecta, te minus firma corporis constitutio à laboribus auocant. Scio te valetudini operam dare oportere. At illa, mihi crede, studiorum alacritas, ex summa animi delectatione, corpus tibi confirmabit. Homini tam diuinis rebus dedito non vacat ægrotare. Non valet qui sine studijs viuit. Quinimmò otium absque literis mors est, & viui hominis sepultura. Id verò etiam mea caussa magnoperè expecto. Nam quum te ad solitudinem reductum viderint ij, quibus sermonem dare soleo, eos subitò æquiores ex tua secessione sum habiturus. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS IOANNI FERNELIO FRANCIÆ ARCHIATRO S.





SÆPENVMERÒ mihi cogitanti de rerum conditione & natura, id vnum in vita difficillimum videri solet, meditationem cum ipsa actione coniungere: id est, mentis functiones ad vsus externos traducere: non quòd vtrunque munus ad hominis ingenium non sit valdè accommodatum, sed quòd speculandi delectatione animus suapte natura præcipuè capiatur: à qua quum ad agendum abstrahitur, minus officiosus esse cogitur, cum ex insolentia, tum quòd ad res obeundas alieno auxilio indigeat. Quo fit vt pauci sint, qui ad animi studia & ad rerum tractationem æquabiliter sint idonei. Te verò, Ferneli, non possum non laudare, qui vtrunque ea felicitate perficis, vt in otio cum actione: & in negotio cum meditatione versari videaris. Quæ enim in Mathematicis, quæ in Philosophia, quæ in re medica tam diligenter scripsisti, mihi in animum subijciunt, quàm rari sint nostra ætate

qui cum iudicio ſcribant. Quo verò ſucceſſu, quaq; exiſtimatione Medicinam facias, res ipſa loquitur: Cui & Regiæ valetudinis primaria prouincia incumbit: & publicæ curationis ſpectata fides. Sed hæc commemoratio ad epiſtolæ argumentum minus pertinet: niſi quòd gratulationis officium libenter impertiri ſoleo ijs, quibus aut amicitiæ, aut dignitatis nomine id à me deberi puto. Venio ad eam occaſionem quæ mihi ad te ſcribendi præcipua eſt: nimirùm vt apud te meæ cauſſæ defenſionem præoccupem, & ante litem mihi iudicem parem: eorum videlicet more, qui de prælio ſuſpicantes, hoſtis aduentum anteuertunt. Exiſtimo non defuturos qui Commentationum noſtrarum in Euclidem, editionem non æquo animo ferant. Ac primùm omnium obijcient, quòd aliorum Demonſtrationes nobis ſumamus, & vtamur pro noſtris. Deinde, opinor, feſtinationem noſtram improbabunt, quòd ne dimidium quidem operis proferamus. Sed prior illa reprehenſio, vt confido, non magnum pondus inuidiæ eſt habitura, apud eos qui æquiori iudicio rem expenderint. Qui enim nos accuſabunt, non iam Campanum, ſed Theonem ipſum accuſent oportet: quorum ille alter nihil ferè habet, quod à Theone non ſit mutuatus: hic verò ipſe aliorum probationes per manus traditas congeſſit. Quid enim? an exiſtimamus Propoſitiones Geometricas ab Euclide in ordinem eſſe redactas, quæ non antè ſuis aſſertionibus confirmatæ eſſent? an verò Theorema de laterum Trigoni Rectanguli potentijs tam celebre, à Pythagora Samio relictum fuiſſe putamus, niſi ſua demonſtratione munitum? Quid ante eum, Thaletem? quid poſt eum, Platonem, Hippocratem Chium, Architam Tarentinum, ac totam Geometrarum nationem feciſſe putamus? an deniq; Euclidem Problema illud ab Oraculo propoſitum de Cubo duplicando, prætermiſſurum fuiſſe credemus, ſi conſtitiſſet demonſtratio? Immò adeò, idem ipſe autor quid aliud ferè ad Geometriam attulit de ſuo, quàm ordinem? Denique quid eſt in omni ſcriptorum genere, quod quiſquam ſibi vendicare aut propriè ſuum dicere poſſit, præter collocationem? Nobis verò qur inuidebitur, ſi ea noſtro nomine emiſimus, quæ ſic excoluimus, vt aliena dici non poſſint? quum interim multa protulerimus, quæ non modò non tralatitia ſunt, ſed noua omninò & hactenus non cogitata. Quæ à Theone & Campano accepimus, meliora effecimus, aut concinnitatis ſpecie, aut compendij dignitate. Demonſtrationes enim, noſtra ſententia, breues & cordatas eſſe oportet. Quibus rebus quum ad eas meditationes pulcherrimas incenderimus animos ſtudioſorum, inuidiã, ſiqua in nos orta fuerit, publica approbatione remouebimus. Quod ad alteram offenſionis partem attinet, qui nos de properatione arguent, ſic habebunt: nos, quum ad ſcribendum accedimus, cogitare non ſolere, quàm magnum opus, ſed quàm vtile ſimus daturi. Planorum argumentum à Solidorum materia ſeorsùm exhibuimus. quid tum? ſi, quod peculiarem habet tractationem, ſeparatim tradidimus? Cuius editionis retardationem commodiùs profectò ſuſtinuiſſem, quàm Geometriæ ſtudioſi. Neque enim mihi homini philoſopho tanta honoris & laudis, quanta hominibus ingenuis, ſcientiæ & doctrinæ cupiditas eſſe debet. Hos libros velut arrhabonem quendam exhibemus, dum opus integrum extruere pergimus, neque laborem intermittimus. Ac tametſi hi libri priores, totius ædificij ſpeciem oſtendunt, & ichnographiam continent: velim tamen à nobis ſe nihil accepiſſe Reſpublica exiſtimet, donec opus abſoluerimus, Deo Optimo Max. qui nos ad hoc munus deſtinauit, approbante. Tu

verò,

verò, Ferneli, si factum nostrum probaueris, magnum nos laborum nostrorum fructum percepisse existimabimus. Sin erit in quo à nobis dissentias, id etiã in vtilitatem emendationis conuertemus. Scis enim in nostra scribendi professione quid nobis sit exoptandum: scilicet, doctos homines nobis ex animo, non, vt in cæteris scriptorum generibus fieri solet, gratiæ caussa suffragari. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS HIERONYMO CARDANO S.

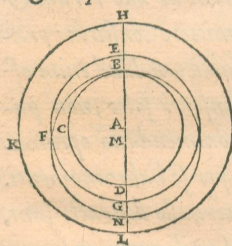
QVVM neque vbi terrarum esses satis compertum haberem, neque esset cui commodè hanc ad te Epistolam darem in hac rerum & temporum perturbatione, eam publicè ad te mittere constitui: præsertim quum argumentum ipsum penè esset publicum. Illud enim officium literarum, quod priuatim in amicos conferri solet, non putabam te à me requirere: propterea quòd ipsa Philosophiæ commendatio optima animorum conciliatrix, ad conseruandam beneuolentiam satis per se habet momenti. Tum publica illa scribendi professio efficit, vt eos qui longo interuallo distracti sunt, præsentes semper habeamus, & cum ipsis, immò cum mortuis familiariter ac sæpe colloquamur. Atq; in meo dolore, quòd doctissimorum hominum, qui paulò ante vixerunt, consuetudine aut notitia non sim potitus, hac sola consolatione vtor. Copernici memoriam sanctissimè colo. Monumentum enim nobis reliquit sui nominis & ingenij sempiternum. Gemmæ Frisij mortem, quæ proximè ad nos allata est, pro eo ac debui, molestè tuli: ad quem etiam scribere institueram, & me breui eum visurum sperabam. Iam tum anteà Erasmus Reinoldus, Copernici doctissimus interpres & imitator, decesserat. Schonerum, Stifelium: Fracastorium, Gauricum, multosq; nostræ Matheseos principes, quos Germania, & Italia item vestra aluit, nunquam vidi: ea quidem caussa, quòd neque ætate æqualis, neque temporis ratione satis instructus essem ad proficiscendum. Quorum omnium desiderium, benigna recordatione sustineo, & eorum scriptis legendis leuius fero. Te verò Cardane, Lugduni, vnde nunc ad te scribo, familiarem diebus multis habui: quum in Scotiam tibi iter esset. Quæ notitia mihi charissima & iucundissima fuit. Erat tibi tum inter manus, Librorum tuorum quos de Subtilitate scripseras, recognitio. Atque, vt ad instituti mei rationem explicandam ingrediar, memini te mihi locum illum ostendere, de duabus lineis, quæ quum coïtionem affectare videantur, nunquam tamen concurrunt. Ex quo tempore non destiti mecum dispicere, quánam ratione id in Geometria constaret. Nam quum firmissimo præiudicio mihi proposuissem, Geometriam eiusmodi esse, quæ ab omni repugnantia & Paralogismo, remota esse deberet: eam tandem comperi suis quidem miraculis non carere, sed probationis subsidium nunquam desiderari. Demonstrationem igitur à nobis peruestigatam, tertio Commentationum nostrarum libro adscripsimus. Alterum item de angulo contactus Paralogismum à te propositum dissoluimus. In quo vt etiam intelligerent studiosi, nos rationibus nostris nihil deesse voluisse,

tuum

tuum iudicium nobis adhibendum esse duximus: & alteram confirmationem huic loco etiam pleniorem subscripsimus. Atque imprimis hoc nobis est præmittendum,

In Circulis, anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, sunt æquales.

Sint enim super Centro A, *duo Circuli* BCDB *&* EFGE, *quorum Diametri* BD *&* EG. *Et secet* EG *ambos Circulos in punctis* E, B, D, *&* G. *Aio duos angulos* CBD *&* FED *esse æquales. Nam si sit* FED *maior ipso* CBD (*neque enim contrà,* CBD *maior vllo pacto erit ipso* FED) *: ac describantur plures Circuli super eodem Centro* A, *quorum vnus hoc loco satis fuerit* HKLH*: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à Diametro & Peripheria, verbi gratia, angulus* KHL, *maior recto: Quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad* B *&* E, *inter se æquales, Quod fuit ostendendum. Idem & de exterioribus iudicium.*



Neque in hac demonstrandi ratione vllus est Paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos Rectilineos: attamen erit angulorum qui fiunt ex sectione rectæ lineæ & Peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui Mixti dicuntur, manifestè maiores & minores fiunt.

His ad hunc modum demonstratis, aio contactum Circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super Centro M, *in eadem linea* HL *posito, describatur Circulus* BFNB, *tanto interuallo, quanto est Circulus* EFGE*: posita scilicet* MB *Semidiametro, æquali ipsi* AE*: qui Circulus tangat* BCDB *Circulum in puncto* B. *Et manifestum est, angulum* FBD, *æqualem esse angulo* FED, *propter æqualitatem Peripheriarum & Diametrorum: Quapropter & idem ipse* FBD *erit angulo* CBD *æqualis. Igitur* CBF *contactus, nihil addit ad ipsum* CBD *angulum. Quare* CBF *quantitas non est, Quod fuit probandum. Atq; hinc procedit demonstratio eorum quæ illuc adduximus, Theorematum: quæ hoc loco repetere nihil attinet. Tu verò pro tuo otio omnia examinabis. De quibus quid sentias si mihi aut priuatim aut publicè significaueris, pergratum mihi feceris. Vale.*

IACOBVS PELETARIVS PETRO NONIO S.





ON *dubitabam, Petre Noni, quum nostræ in Euclidem commentationes ad te peruenirent, quin me erga te bene affectum, vel ipso doctrinæ nomine, esses existimaturus. Hæc enim nostra Mathematicarum artium studia eiusmodi sunt, vt eos qui ipsa amplectuntur, mutuo amore deuinciant. Quid enim veritate, quam nos tractamus, candidius? quæ maior ad conciliandos animos vis esse potest, quàm eius quæ animorum*

perpet

perpetuitatem maximè teſtatur, ſcientiæ? Memini ego quum Mathematicis initiarer (quod quum tardè feciſſem, magna etiam intermiſſione, ob temporum meorum varietatem vſus ſum) ac ſtudiorum ſucceſſione tua ſcripta euoluerem, me magna ſpe & alacritate fuiſſe incenſum, vt aliquando pari facultate & iudicio ſcribere licêret. Librum de Crepuſculis abs te diligentiſſimè ſcriptum auidiſſimè legebam: & alterum item illum, quo in noſtrum Orontium animaduertis. Qui vtinam tam plauſibilem præ ſe ferret titulum, quàm eſt Mathematico, id eſt, vero argumento conſcriptus. ſed tamen veritate ipſa apud ſynceros animos nulla res potior debet eſſe. De me verò quum dico, animum quidem meum tibi teſtatum facere cupio: ſed interim mihi polliceor futurum, vt mihi in amore reſpondeas, ſimulatq; tibi innotuero: ſcilicet, vbi primùm hæ noſtræ Demonſtrationes tibi in manus venerint. Non enim puto te ante hoc tempus de me audiuiſſe, qui patrio ſermone hucuſq; ferè ſcripſerim: cuiuſmodi & Ars nautica abs te edita in tuorum manibus verſatur: & Algebram etiam abs te ſcriptam audio. Sed has ipſas Demonſtrationes ſine maiori meæ erga te beneuolentiæ teſtimonio exire nolui. Ac velim intelligas, me nihil magis optare, quàm te meorum ſcriptorum cenſorem mihi dari. Eaq; gratia maturo quantùm poſſum (neq; properationem affecto tamen) laborum meorum publicationem, ne is mihi pereat fructus, quem ex veſtro omnium iudicio, aut etiam caſtigatione, capere poſſum. Omninò enim aliter ſum affectus, quàm cæteri. Non me pudet doctorum hominum iudicium quocunque meo diſpendio experiri: modò id tandem in meum commodum reponere ſperem. Quod in me quiſque animaduerterit, id in maximo exiſtimationis lucro deputabo. Cuius mihi ſatius eſt temporariam iacturam facere, quàm perpetuam. At enim, inquies, quid eſt quòd temporis beneficio non vteris? quur teipſum in conſilium non adhibes, moræ patiẽtia? Rectè. Sed omnibus hominibus, mi Noni, procliue eſt vt peccent, etiã in veritatis luce, in qua ipſa offendere, alienum imprimis & inhoneſtum eſſe videtur. Emendatio non tam conſtat tempore, quàm conſilio. Conſilium verò ipſum ab amico præſtatur, & diuturni temporis vice eſt. In re noſtra tam lyncei eſſe non poſſumus. Nobis planè prouidentia illa præſcribit, vt mutuas operas præſtemus. Sed ego longiùs digredior. Ad me reuertor. Tuum erit, mi Noni, non tantùm amici nomine (quod tibi ingenua amoris profeſſio præſcribit) ſed etiam veritatis contemplatione (quò te publica vtilitas inuitat) meas lucubrationes, quatenus vacabit, examinare. In quo longè felicior fuiſſem, ſi tecum per locorum interuallum, communicare licuiſſet. Sed quid locorum interuallum mihi prætendo? Immò verò, fato quodam meo neque præceptorem in his ſtudijs, neque ſocium vnquam habui: ne in Gallia quidem noſtra. Meditatione omnia ſum aſſecutus. Qua occaſione ſymbolum illud ex Periandro mihi ſumpſi, μέλετη τὸ πᾶν. Quæ verò aſſequi potui, ea libenter impertio. Idem verò abs te etiam expecto, mihiq; gratiſſimum erit, ſi aliquando intellexero tibi amicitiam meam curæ fuiſſe. Quod tum demùm intelligam, ſi me de ijs quæ ad exiſtimationem meam & publicam vtilitatem pertinebunt, monueris.

Vale. Lugduni.



IACOB

IACOBVS PELETARIVS PASCHASIO HAMELIO MATHEMATICARVM REGIO PROFESSORI S.





IRABVNTVR, opinor, nonnulli, quòd in hac Demonstrationum editione nimis de me ipse diffidere videar: dum eorum ad quos scribo tam studiosè fidem obtestor, & opem imploro. Verùm eo consilio id facio, vt palàm profitear quàm longè absim ab eorum hominum confidentia, qui ambitiosè res suas ostentant, & pari impudentia aliorum inuenta sibi tribuunt. Quanta cura, quanta meditatione scripserim, mihi conscius sum: quid præstiterim, aliorum iudicio relinquo. Equidem in meis lucubrationibus aliis, non ita supplex esse soleo. Sed in hoc Geometriæ spectaculo, nobis modestiæ persona imposita est, non ostentationis. Multorum hominum & seculorum adiumenta huc conferenda sunt. Tibi verò, Paschasi, id muneris præ cæteris incumbit, vt tuam in hac re, quod facis, operam præstes. Eam facultatem tua doctrina, quam assiduo studio singularem comparasti, tibi concedit: opportunitatem abundè suppeditat Regia illa professio: Illud verò in mea caussa officium, nostra etiam amicitia à te postulat. Vale. Lugduni. M. D. LVII.

